1972
international book year

KFKI-72-46

Andréka H.
Gergely T.
Németi I.

PROBLÉMAORIENTÁLT NYELVHIERARCHIA ÉS BEÁLLITÓ LOGIKA

Hungarian Academy of Sciences

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS

BUDAPEST

KFKI-72-46

PROBLÉMAORIENTÁLT NYELVHIERARCHIA ÉS BEÁLLITÓ LOGIKA

Andréka H.[*], Gergely T., Németi I.[*]
Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest
Számitástechnikai Főosztály

[*] NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet Számolóközpontja

A szerzők köszönetüket fejezik ki Jékiné Szabó Évának e tanulmány kivitelezésében kifejtett áldozatkész munkájáért.

T A R T A L O M

ABSTRACT

This study deals with formal foundations for the first step in the theory of artificial intelligence, namely the problem-oriented hierarchy of languages, and the setting logics operating on it. To develop the required theory of semantics mathematical logic is introduced in a universal algebric framework. No knowledge of universal algebra is presupposed, and the concepts used are defined in the study; familiarity with naive set theory is sufficient for an appreciation of the arguments.

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматриваются формальные основы первого этапа теории искусственного интеллекта проблемно-ориентированной языковой иерархии и оперирующей над ней логики установки. Для разработки нужных семантических аспектов математическая логика излагается на базе универсальной алгебры. В работе приводятся основные понятия универсальной алгебры, необходимые для понимания изложенного материала. Данная работа рассчитана на читателя, знакомого с наивной теорией множеств.

KIVONAT

Ez a tanulmány a mesterséges intelligenciaelmélet első fokozatának, a problémaorientált nyelvhierarchiának és az ezen operáló beállító logikának formális alapjait ismerteti. Az ehhez szükséges szemantikai aspektusok kidolgozása érdekében a matematikai logikát univerzális algebrai alapokon tárgyaljuk. A dolgozat a megértéséhez szükséges univerzális algebrai alapokat is ismerteti. A tanulmány olvasásához elegendő a naiv halmazelmélet ismerete.

1. BEVEZETÉS

A problémamegoldáselmélet egyik legfontosabb momentuma a probléma /PR/ megfelelő nyelven történő leirása. Megfelelő egy olyan felbontóképességü nyelv, mely a PR-t a szükséges részletességgel irja le és lehetőséget biztosit a PR-ban levő kapcsolatok feltárására is. Ezért a megoldórendszernek /MR/ a PR leirásához nyelvkészletre /NK/ van szüksége, amellyel vagy rendelkezik, vagy amelyet előállit. Az NK-ból egy adott PR-hez a megfelelő nyelvet az MR beállitó logikája /BL/ választja ki és a továbbiakban ezt a nyelvet kiterjeszti a PR-ben levő kapcsolatok leirására alkalmas szintig. Feltételeztük, hogy NK minden eleméhez különböző szintü nyelvek tartoznak. Ezek összességét nevezzük nyelvhierarchiának.

1.1 Univerzum

Azt a környezetet, amelyben az MR müködik, vagyis amelyből a PR-eket kapja, univerzumnak nevezzük. Legyen E az elemi objektumok halmaza

$$u(E) \overset{d}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi({}^{i}E) \quad {}^{*/}$$

$$_{n}U_{E} \overset{d}{=} u^{n}(E)$$

$$U_{E} \overset{d}{=} \bigcup_{n=o}^{\infty} {}_{n}U_{E}$$

U_E-t az E-n értelmezett homogén univerzumnak nevezzük. Legyen továbbá

$$\bar{u}(E) \overset{d}{=} E \cup u(E)$$

$$_{n}\bar{U}_{E} \overset{d}{=} \bar{u}^{n}(E)$$

---

*/ ${}^{1}A \overset{d}{=} A;\quad {}^{n+1}A \overset{d}{=} {}^{n}A \times A$

$\pi A \overset{d}{=} \{H \mid H \subset A\}$, A cikk folyamán a $\subset$ jelet $\subseteq$ értelemben használjuk.

$f^{o}(x) \overset{d}{=} x;\quad f^{n+1}(x) \overset{d}{=} f(f^{n}(x))$

$$\bar{U}_E \stackrel{d}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} {}_n\bar{U}_E$$

$\bar{U}_E$-t az E-n értelmezett inhomogén univerzumnak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ${}_kU_E \cap {}_lU_E = \phi$ x/, ha $k \neq \ell$, és ${}_k\bar{U}_E \subset {}_\ell\bar{U}_E$, ha $k \leq \ell$.

1.2 A probléma

Legyen $D \subset U_E$. Az MR rendelkezik bizonyos ismeretanyaggal U_E-ről. Ha ennek alapján D-t szintaktikusan teljesen, szemantikusan csak részben tekinti adottnak, akkor D MR számára PR. Az MR müködésének célja D kiegészitése.

1.3 Problémaleiró nyelv

U_E azon elemeihez, melyek informativ kapcsolatban állhatnak D-vel, nevet rendelünk. Ezeket konstansoknak nevezzük, halmazuk R. A K operációhalmaz elemeivel ezekből uj, összetett nevek generálhatók. Az U_E tetszőleges elemeiről változók /halmazuk V/ segitségével beszélünk. A nyelv, mint ismeretes, rendelkezik szintaktikával és szemantikával. A megfelelő nyelvet NK-ból ugy választjuk ki, hogy alkalmas legyen D elemeinek leirására, szintjét pedig ugy, hogy még alkalmas legyen D kapcsolatainak leirására, és minimálisan fedje az univerzum D-n kivüleső részét. Ahhoz, hogy MR-t automatizálhassuk, a problémaleirási folyamatot formalizálni kell. Ehhez a következő utat választottuk. Alapul a matematikai logika és az univerzál-algebra apparátusát vesszük. Az NK elemei Boole-algebrák. A megfelelő felbontóképességü nyelv létezését a finomitási tétel biztositja. Abból a tényből, hogy a nyelvek /szürők/ halmaza bővebb, mint az elméleteké, kiderül, hogy a leirás és a megoldás megfelelő nyelvei nem mindig esnek egybe. A D relációinak leirására az NK-beli elsőrendü predikátumkalkulus-szintü nyelvet n-edrendüig terjesztjük ki, n = 1,2,... . A továbbiakban a magyar nyelv vagy, és, létezik, minden, nem és következik szavainak röviditésére rendre a $\vee, \&, \exists, \forall, \sim, \Rightarrow$ jeleket használjuk.

2. ALGEBRAI FOGALMAK

2.1. Általános fogalmak

Egy $\langle \Omega, a, A, \Theta \rangle$ négyest absztrakt algebrának nevezünk, ahol

Ω : absztrakt müveleti jel halmaz

a : $\Omega \to \omega$ xx/ argumentumszám ; $\Omega_n \stackrel{d}{=} a^{-1} n$

x/ ϕ az üres halmaz jele

xx/ ω a természetes számok halmaza és a 0.

A : az algebra hordozója /tetszőleges, de nem üres halmaz/

$\sigma : \Omega \to \bigcup_{i=o}^{\infty} {}^{(i_A)}A$, az absztrakt müveleti jelekhez az A halmazon érkezett konkrét müveleteket rendel, ugyhogy

$\sigma\Omega_n \subset {}^{(n_A)}A$ x/

Ahol ez nem vezethet félreértéshez, egy absztrakt algebrát az $<\sigma\Omega,A>$ párral adunk meg a fenti négyesnek megfelelően.

Megjegyzés: Megadjuk, hogy a Malcev-féle jelölésrendszer [2,3] hogyan alakitható át az itt használt [1] jelölésrendszerbe és viszont.

1/ Legyen adva az $<\Omega,a,A,\sigma>$ absztrakt algebra.
Mivel minden halmaz jól rendezhető, felvehetünk egy j függvényt és α rendszámot /a rendszámokat halmaznak tekintjük/ ugy, hogy

$$j : \alpha \leftrightarrow \Omega \quad \text{xx/}$$

Ekkor az algebra Malcev-féle alakban:

$$\mathfrak{A} \overset{d}{=} <A,j\circ\sigma> \quad , \quad \tau_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} j\circ a \quad \text{xxx/}$$

2/ Legyen adva az algebra Malcev-féle alakban:

$$\mathfrak{A} = <A,\varphi_A> \quad , \quad \tau_{\mathfrak{A}} = <n_1,\dots,n_\eta,\dots> \quad \eta < \alpha \quad \text{, ahol}$$

$$\varphi_A = <f_1,\dots,f_\eta,\dots> \quad \eta < \alpha$$

Ez az algebra a Kohn-féle jelölésrendszerben:

$$<\alpha, \tau_{\mathfrak{A}}, A, \varphi_A>$$

---

x/ ${}^{A}B \overset{d}{=} \{f \mid f:A\to B\}$ Megjegyzés: A-val indexelt B-beli sorozat és $f:A\to B$ függvény között nem teszünk különbséget.

Ha $f\subset A\times B$ és $C\subset A$, akkor $fC \overset{d}{=} \{x \mid (\exists a\in C)<a,x>\in f\}$

Megjegyzés: n-argumentumu függvényeket gyakran n+1 változós relációként kezelünk, például párok halmazaként. Ha fC nem értelmes, akkor $\tilde{f}C$-t, $\tilde{f}C$-t jelent. Ezek definicióját l. 22.old.

xx/ $\leftrightarrow$ az egy-egyértelmü megfeleltetés jele

xxx/ Legyen $r\subset A\times B$ és $p\subset B\times C$. Akkor
$r\circ p \overset{d}{=} \{<a,c> \mid (\exists b)(<a,b>\in r \& <b,c>\in p)\}$;
$r^1 \overset{d}{=} r$, $r^{n+1} \overset{d}{=} r^n \circ r$

Algebrákra, ha nem okozhat félreértést, hordozójukkal hivatkozunk.

$$W_\Omega(X) \stackrel{d}{=} \bigcap\{A \mid A = X \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n \times {}^n A\} \quad ^{x/}$$

$\langle\Omega, a, W_\Omega(X), \sigma_w\rangle$ algebrát az Ω müveletek X jelhalmaz fölötti szóalgebrájának nevezzük, ha σ_w a következő:

$$b\in\Omega_n,\ \alpha_i \in W_\Omega(X),\ i=1,\dots,n \Longrightarrow \sigma_w(b)(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \stackrel{d}{=} b\alpha_1\dots\alpha_n$$

A szóalgebra elemeinek egy módositott irásmódját is használjuk. A kétargumentumu müveletek jeleit az argumentumok közé irjuk és az egyértelmü olvasást zárójelezéssel biztositjuk. /A többi müveletjel használata változatlan/. Például $\wedge c \vee \neg ab$-t $c\wedge(\neg a \vee b)$ alakban is leirhatjuk.

Legyen $C \subset A$ és $f: C \to B$. Akkor

$\mathrm{ext}(\langle\Omega,a,A,\sigma_A\rangle, \langle\Omega,a,B,\sigma_B\rangle) f \stackrel{d}{=} \bar{f}$ homomorf kiterjesztése A-ra

A szóalgebra egy tetszőleges eleme meghatároz egy levezetett müveletet, melynek jelölésére megengedjük valamilyen uj müveleti jel (ρ) definiciószerü bevezetését, például $x \to y \stackrel{d}{=} \neg x \vee y$, a következő módon:

Legyen $\rho \notin \Omega$

ρ jelentését a következő függvény megválasztásával rögzitjük:

$d : \{\rho\} \times {}^n W_\Omega(X) \to W_\Omega(X)$ A fenti példában d-t egyenlettel adtuk meg, ahol a változók helyébe $W_\Omega(X)$ elemei helyettesithetők.

$b \stackrel{d}{=} d \cup \Delta_{W_\Omega(X)}$ $^{xx/}$

$g : W_{\Omega\cup\{\rho\}}(X) \to W_\Omega(X)$, ahol $a\rho = n$

$g(\omega\alpha_1\dots\alpha_n) \stackrel{d}{=} b(\omega g(\alpha_1)\dots g(\alpha_n))$, ahol $\omega\in\Omega\cup X\cup\{\rho\}$, $\alpha_i \in W_\Omega(X)$, $i=1,\dots,n$

---

x/

$$\bigcap A \stackrel{d}{=} \bigcap_{a\in A} a \; ; \; \bigcup A = \bigcup_{a\in A} a$$

xx/

$$\Delta_A \stackrel{d}{=} \{\langle a,a\rangle \mid a\in A\}$$

A g függvény megadja, hogyan kell "leforditani" $W_{\Omega\cup\{\rho\}}(X)$ szóalgebrát $W_{\Omega}(X)$ -re. Hangsulyozzuk, hogy ρ csak $W_{\Omega}(X)$ elemeinek rövid irására szolgál. Megjegyezzük, hogy valamely A algebra σ függvénye kiterjeszthető ρ-ra, a következőképp:

$$\sigma(\rho) \stackrel{d}{=} \{< \overset{n}{\Box}\, s(x_1,\dots,x_n),\ ext\left(W_{\Omega}(X),A\right)(s)\left(g(\rho x_1 \dots x_n)\right) > \mid s\in {}^{X}A\} \quad */$$

Az Ω konkrét müvelethalmazból levezetett konkrét müveletek halmazát $\hat{\Omega}$-val, ebből a $W_{\Omega}(X)\setminus X$-nek megfelelőeket $\hat{\Omega}$ -val jelöljük.

A továbbiakban a tulajdonságok rövidítésére felülhuzott betüsorozatot használunk, mely fölé irt szám azt jelöli, hogy hány névből álló sorozatra vonatkozik a tulajdonság. Például $\overline{SU}^3 \leq, B, S$ azt jelenti, hogy az S halmaz szürője a B halmaznak a $\leq$ relációra nézve, $\overline{SU}^2\, B, S$ azt, hogy az S halmaz szürője a B halmaznak, mig $\overline{SU}\, S$ azt jelenti, hogy az S halmaz szürő.

Zárt az Ω müveletre nézve a B halmaz /$\overline{Z}$/

$$\overline{Z}^3 \sigma, \Omega, B \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} (\forall f\in\sigma\Omega)\ f\left({}^{af}B\right) \subset B$$

Részalgebrája A-nak B /$\overline{RA}$/

$$\overline{RA}^2 <\Omega,a,A,\sigma>, B \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} B\subset A \ \&\ \overline{Z}^3\sigma,\Omega,B$$

Megjegyezzük, a részalgebra szó a B-ből képezhető $<\Omega,a,B,\sigma_B>$ algebrára vonatkozik, ahol $(\forall f\in\Omega)\sigma_B f \stackrel{d}{=} \left(\sigma_A f\right)\Big|_B$ **/

Megjegyezzük még, hogy $\overline{Z}^3\sigma,\Omega,B \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \overline{Z}^2\sigma\Omega,B$.

Az $<R,K,a,A,\sigma>$ ötös algebrai rendszer, ha

$<K,a|_K,A,\sigma|_K>$ absztrakt algebra és

$a|_R : R \to \omega$, ugy, hogy ha $R_n \stackrel{d}{=} a^{-1}n$, akkor

$\sigma(R_n) \subset \pi({}^{n}A)$

R elemeit relációjeleknek nevezzük.

---

*/ Legyen $f : A \to B$, Akkor $\overset{n}{\Box} f : {}^{n}A \to {}^{n}B$ a következőképp:
$\overset{n}{\Box} f<a_1,\dots,a_n> \stackrel{d}{=} <fa_1,\dots,fa_n>$

**/ $f|_B$ az f függvény /vagy reláció/ lekorlátozása a B halmazra.

Ha ez nem okozhat félreértést, $\langle R,\phi,a,A,\sigma\rangle$ helyett $\langle R,a,A,\sigma\rangle$ -t irunk, vagy $\langle \sigma R,A\rangle$-t, vagy ha $\sigma R = \{r\}$, akkor $\langle r,A\rangle$ -t. x/

Általánositjuk a $\square$ jel értelmezését kéthelyü relációkra:

$$\overset{n}{\square}\, r \overset{d}{=} \{\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle, \langle b_1,\dots,b_n\rangle\rangle \mid (\forall i\in[1,n])\ \langle a_i,b_i\rangle\in r\} \qquad \text{xx/}$$

Megjegyezzük, hogy f-et akár függvénynek, akár relációnak tekintjük, $\square f$ ugyanazt az eredményt adja.

$$\langle\Omega,a,A_1,\sigma_1\rangle \times \langle\Omega,a,A_2,\sigma_2\rangle \overset{d}{=} \langle\Omega,a,A_1\times A_2,\sigma_{12}\rangle \quad \text{, ahol}$$

$f\in\Omega_n$-re

$$\sigma_{12} f : {}^{n}(A_1\times A_2)\longrightarrow(A_1\times A_2) \quad \text{, ugyhogy}$$

$$\overset{n+1}{\square}\ \varepsilon_i\ \sigma_{12} f \overset{d}{=} \sigma_i f \qquad i = 1,2 \qquad \text{xxx/}$$

Legyen $\mathfrak{A} = \langle R,K,a,A,\sigma\rangle$ és $\mathfrak{B} = \langle K,a,A,\sigma\rangle$. Ekkor

Kongruencia /$\bar{K}$/

$$\bar{K}^2 \equiv, \mathfrak{A} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \bar{K}^2 \equiv, \mathfrak{B} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{RA}^2\ \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}, \equiv$$

Legyen $a = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$ és $b = \langle b_1,\dots,b_n\rangle$

Egzisztenciális kongruencia /$\overline{\exists K}$/

$$\overline{\exists K}^2 \equiv, \mathfrak{A} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \bar{K}^2 \equiv, \mathfrak{B}\ \&$$

$$\&(\forall n\in\omega, r\in\sigma R_n, a\in r)(\forall i\in[1,n])(\forall c \equiv a_i)(\exists b \overset{n}{\square}\!\equiv a)\, b_i = c\ \&\ b\in r$$

---

x/ ϕ az üres halmaz jele

xx/ Legyen $n_1,n_2\in\omega$. $[n_1,n_2] \overset{d}{=} \{i \mid n_1 \le i \le n_2\}$

xxx/ ε_i vetitőfüggvény az i-édik koordinátára, azaz

$\varepsilon_i\langle a_1,\dots,a_i,\dots\rangle \overset{d}{=} a_i$

Univerzális kongruencia $/\overline{\forall K}/$

$$\overline{\forall K}^2 \equiv, \mathfrak{A} \overset{d}{\Longleftrightarrow} K^2 \equiv, \mathfrak{B} \ \&$$

$$\& (\forall n \in \omega, r \in \sigma R_n, a \in r)(\forall b \in \overset{n}{\square} \equiv (a))\ b \in r$$

Legyen $\overline{K}^2 \equiv, \mathfrak{A}$. Ekkor

$$A/_{\equiv} \overset{d}{=} \overset{\vee}{\equiv}(A) \quad ^{x/}$$

$$\mathfrak{A}/_{\equiv} \overset{d}{=} \langle R, K, a, A/_{\equiv}, b \rangle \quad \text{, ahol}$$

$$\text{ha} \quad r \in R_n \cup K_{n-1} \quad \text{, akkor}$$

$$br \overset{d}{=} \overset{n}{\square} \overset{\vee}{\equiv} (\sigma r)$$

Megjegyezzük, hogy mint eddig is tettük, egyargumentumu függvények argumentumát, ha ez nem vezethet félreértéshez, nem tesszük zárójelbe.

Egy $\mathcal{A} = \langle \{\Lambda, V, \neg, 0, 1\}, A \rangle$ algebra Boole-algebra $/\overline{BA}\ \mathcal{A}/$, ha a következő 1./-12./ egyenleteket teljesiti:

1./ $x \wedge x = x$	7./ $x \vee x = x$
2./ $x \wedge y = y \wedge x$	8./ $x \vee y = y \vee x$
3./ $x \wedge 1 = x$	9./ $x \vee 1 = 1$
4./ $x \wedge \neg x = 0$	10./ $x \vee \neg x = 1$
5./ $x \wedge 0 = 0$	11./ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
6./ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	12./ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

A cikk folyamán a Boole-algebrák tulajdonságait ismertnek tételezzük fel.

Zárt halmazrendszer $/\overline{ZHR}/$

$$\overline{ZHR}^2\ C, H \overset{d}{\Longleftrightarrow} C \subset \pi H \ \&\ \overline{Z}^2 \{\sqcap\}, \pi C$$

Megjegyezzük, hogy ha $\overline{ZHR}^2 C, H$, akkor $H \in C$, mert $\sqcap \phi = H$

---

x/ $\overset{\vee}{r} \overset{d}{=} \{\langle a, ra \rangle | (\exists b) \langle a, b \rangle \in r\}$

Lezárási operátor /$\overline{LO}$/

$\overline{LO}^2 f,H \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall X \subset H)(X \subset fX \;\&\; f \text{ monoton} \;\&\; f^2 = f \;\&\; f{:}\pi H \to \pi H)$

Megjegyzés: $\overline{LO}\ f \Rightarrow \overline{ZHR}^1 ek\ f$ ×/

és $\overline{ZHR}^2 C,H \Rightarrow \overline{LO}\ \{\langle X, \bigcap\{Y \mid X \subset Y \;\&\; Y \in C\}\rangle \mid X \subset H\}$ lásd [1].

A továbbiakban a bizonyitásokat a könnyebb áttekinthetőség érdekében következmény-gráf sémával fogjuk néha megadni. A következmény-gráf valamely $A \Rightarrow B$ éle azt jelenti, hogy az A állitásból következik a B állitás. Amennyiben ez a következés korábban bizonyitott D nevü állitás segitségével látható be, ugy ezt $\overset{D}{\Longrightarrow}$-vel jelöljük. Ha a B állitáshoz több nyil vezet, B a kiinduló állitások együttes teljesüléséből következik.

2.2. Elő-Boole-algebrák

Előrendezés /$\overline{ER}$/

$\overline{ER}^2\ r,H \overset{d}{\Longleftrightarrow} r \supset r \circ r \cup \Delta_H$

$\inf_{r,H} D \overset{d}{=} \{k \mid k \in H \;\&\; k \times D \subset r \;\&\; (\ell \times D \subset r \Rightarrow \langle \ell, k\rangle \in r)\}$

$\sup_{r,H} D \overset{d}{=} \inf_{r^{-1},H} D$

$\inf_{r,H}$ és $\sup_{r,H}$ helyett, ahol ez nem vezet félreértésre, csak inf-t és sup-t irunk. ××/

A továbbiakban a 2. fejezet végéig feltesszük, hogy $\overline{ER}^2 \leq_H, H$; $X, Y \overset{d}{\subset} H$; és $a, b \overset{d}{\in} H$. Ahol ez nem vezet félreértéshez, $\leq_H$ helyett $\leq$ -t irunk.

Megjegyzés: $\overline{\forall K}^2 \leq_H^\varepsilon, \langle \leq_H, H\rangle$. ×××/

$$B^H \overset{d}{=} H/_{\leq_H^\varepsilon} \qquad T^H \overset{d}{=} \{\cup T \mid T \subset B^H\}$$

×/ ek $f = \{c \mid (\exists a)\langle a,c\rangle \in f\}$

et $f = \{a \mid (\exists c)\langle a,c\rangle \in f\}$

××/ Ha inf és sup argumentuma vagy értéke $\{a\}$, akkor ehelyett gyakran a-t irunk.

×××/ legyen $r \subset A \times B$ ekkor $r^\varepsilon \overset{d}{=} r \cap r^{-1}$

Lemma 1: $\bar{Z}^2\{\bigcap,\bigcup\}$, T^H

Bizonyitás: Legyen $Z \subset T^H$

$$v\in Z \Longrightarrow \left(\overset{d}{\exists} T_v \subset B^H\right) v = \bigcup T_v \; ; \quad \bigcup_{v\in Z} T_v \subset B^H \quad \text{x/}$$

$$\bigcup Z = \bigcup_{v\in Z} \left(\bigcup T_v\right) = \bigcup \bigcup_{v\in Z} T_v \in T^H$$

$\bigcap Z$-re a bizonyitás ugyanigy végezhető el. ▲

$\hat{X}^H \overset{d}{=} \bigcap\{T \mid X\subset T \,\&\, T\in T^H\}$ /Ha nem okoz félreértést, akkor $\hat{X}$ -t fogunk irni./

$e_H \overset{d}{=} \{\langle X,\hat{X}\rangle \mid X\subset H\}$

Lemma 2: $\overline{LO}\ e_H$

Következmények: 1/ (L2K1) $T^H = \{X \mid \hat{X}=X\}$

2/ (L2K2) $\hat{X} = \bigcup\{\hat{a} \mid a\in X\}$

3/ (L2K3) $B^H = \min_{\subset}\left(T^H \setminus \{\phi\}\right)$ xx/

4/ (L2K4) $e_H(X) = \overset{\varepsilon}{\leq}_H(X)$

Bizonyitás: L1 $\Longrightarrow \overline{ZHR}^2 T^H, H$ xxx/ ▲

$\Omega \overset{d}{=} \{\wedge,\vee,\neg\}$ $\qquad \Gamma \overset{d}{=} \Omega\cup\{0,1\}$

$R_H = \left\langle \Omega, a\big|_{\Omega}, \pi H, \sigma_H\big|_{\Omega}\right\rangle$ $\qquad P_H \overset{d}{=} \langle \Gamma, a, \pi H, \sigma_H\rangle$, ahol

az a és σ_H függvényeket a következők definiálják:

---

x/ $\left(\overset{d}{\exists} x\right) px \overset{d}{\Longleftrightarrow} \exists y py \,\&\, x \overset{d}{\in} \{y \mid py\}$

Megjegyezzük, hogy valamely formulában szereplő relációjel fölötti d betü - például $\overset{d}{=}$, $\overset{d}{\in}$, $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$, stb.- azt jelenti, hogy a formulában szereplő uj fogalmat olyannak definiáljuk, amely mellett teljesül az állitás. Ha több ilyen van, akkor a kiválasztási axiómával definiáljuk.

xx/

$\min_{\leq_H} X \overset{d}{=} \{a \mid a\in X \,\&\, (X\times\{a\})\cap \leq_H = \phi\}$

xxx/

Lemma n-re Ln-nel és Tétel n-re Tn-nel hivatkozunk, ahol $n\in\omega$.

Legyen $\alpha\in\Gamma$. Ekkor $\sigma_H\alpha$-t α_H-val jelöljük, és

$$0_H \overset{d}{=} \inf H$$

$$1_H \overset{d}{=} \sup H$$

$$\urcorner_H X \overset{d}{=} \{y \mid (\exists a\in X)(\inf\{a,y\} = 0_H \,\&\, \sup\{a,y\} = 1_H)\}$$

$$Y\wedge_H X \overset{d}{=} \bigcup\{\inf\{a,b\} \mid a\in X \,\&\, b\in Y\}$$

$$Y\vee_H X \overset{d}{=} \bigcup\{\sup\{a,b\} \mid a\in X \,\&\, b\in Y\}$$

$$\Omega_H \overset{d}{=} \sigma_H\Omega \qquad \Gamma_H \overset{d}{=} \sigma_H\Gamma$$

Lemma 3: $0_H\in B^H\cup\{\phi\} \,\&\, 1_H\in B^H\cup\{\phi\}$

Bizonyitás:

$$\begin{tikzcd} a\in \inf H \arrow[d, Rightarrow] & & b\in \inf H \arrow[d, Rightarrow] \\ a\leq b \arrow[dr, Rightarrow] & & b\leq a \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \hat{a}=\hat{b} & \end{tikzcd}$$

A bizonyitás 1_H-ra ugyanigy megy. ▲

Lemma 4: $a\in\urcorner_H b \Longleftrightarrow b\in\urcorner_H a$ */

Bizonyitás:

$$\begin{array}{c} a\in\urcorner_H b \\ \Updownarrow \\ a\in\{y \mid \inf\{b,y\} = 0_H \,\&\, \sup\{b,y\} = 1_H\} \\ \Updownarrow \\ \inf\{b,a\} = 0_H \,\&\, \sup\{b,a\} = 1_H \\ \Updownarrow \\ b\in\urcorner_H a \end{array}$$

▲

Lemma 5: $\hat{a} = \hat{b} \Longrightarrow ((c \leq b \Longleftrightarrow c \leq a) \,\&\, (b \leq c \Longleftrightarrow a \leq c))$

Bizonyitás: a/

$$\begin{tikzcd} \hat{a} = \hat{b} \arrow[d, Rightarrow] & c \leq b \arrow[d, Rightarrow] \\ b \leq a \arrow[r, Rightarrow] & c \leq a \end{tikzcd}$$

b/

$$\hat{a} = \hat{b} \,\&\, c \leq a \underset{\text{L5a/}}{\Longrightarrow} c \leq b$$

▲

---

*/ $\{a\}$ helyett gyakran a-t irunk.

<u>Lemma 6</u>: $\hat{a} = \hat{b} \Longrightarrow \Big(\inf(\{a\}\cup X) = \inf\big(\{b\}\cup X\big) \,\&\, \sup\big(\{a\}\cup X\big) = \sup\big(\{b\}\cup X\big)\Big)$

Bizonyitás: Legyen $\hat{a} = \hat{b}$. Akkor

$$
\begin{array}{c}
c \in \inf(\{a\}\cup X) \\
\Updownarrow \\
c \le a \,\&\, \{c\}\times X \subset \,\le\, \& \Big(\big(\ell \le a \,\&\, \{\ell\}\times X \subset \le\big) \Rightarrow \ell \le c\Big) \\
\text{L5} \rightarrow \Updownarrow \qquad\qquad \text{L5} \rightarrow \Updownarrow \\
c \le b \,\&\, \{c\}\ X \subset \,\le\, \& \Big(\big(\ell \le b\big) \& \{\ell\}\times X \subset \le\big) \Rightarrow \ell \le c\Big) \\
\Updownarrow \\
c \in \inf\big(\{b\}\cup X\big)
\end{array}
$$

A bizonyitás sup-ra ugyanigy megy. ▲

<u>Lemma 7</u>: $\inf X \in B^H \cup \{\phi\} \,\&\, \sup X \in B^H \cup \{\phi\}$

Bizonyitás: Legyen $\hat{a} = \hat{b}$. Akkor

$$
\begin{array}{c}
a \in \inf X \\
\Updownarrow \\
a \times X \subset \,\le\, \& \big(\ell \times X \subset \,\le\, \Longrightarrow \ell \le a\big) \\
\text{L5} \longrightarrow \Updownarrow \qquad\qquad \text{L5} \longrightarrow \Updownarrow \\
b \times X \subset \,\le\, \& \big(\ell \times X \subset \,\le\, \Longrightarrow \ell \le b\big) \\
\Updownarrow \\
b \in \inf X
\end{array}
$$

A bizonyitás sup-ra ugyanigy megy. ▲

Egy $f \in \hat{\Gamma}_H$ müveletet egyszerinek hivunk, ha az õt definiáló $W_\Gamma(X)$-beli szóban X bármely eleme legfeljebb egyszer fordul elõ.

<u>Tétel 1</u>: Legyen $f \in \hat{\Gamma}_H$. Akkor

a/ f egyszeri $\Longrightarrow f(X_1,\dots,X_{af}) = \cup\{fs \mid s \in X_1 \times \dots \times X_{af}\}$

b/ $f(X_1,\dots,X_{af}) \supset \cup\{fs \mid s \in X_1 \times \dots \times X_{af}\}$

c/ $(\forall i \in [1,af])\, \hat{X}_i = \hat{Y}_i \Longrightarrow f(X_1,\dots,X_{af}) = f(Y_1,\dots,Y_{af})$

d/ f monoton

e/ ek $f \subset T^H$

Bizonyitás: indukcióval

1/ $0_H, 1_H$ -ra a/-d/ semmitmondó

e/ $0_H, 1_H \underset{\substack{\uparrow \\ L3}}{\in} B^H \cup \{\phi\}\ T^H$

$\urcorner_H$ -ra

a/,b/: $\urcorner_H X = \{a \mid (\exists b \in X)\ \inf\{a,b\} = 0_H \,\&\, \sup\{a,b\} = 1_H\} =$

$= \{a \mid (\exists b \in X)\ a \in \urcorner_H b\} =$

$= \bigcup\{\urcorner_H b \mid b \in X\}$

c/ $\hat{a} = \hat{b} \Longrightarrow \urcorner_H a = \{c \mid \inf\{a,c\} = 0_H \,\&\, \sup\{a,c\} = 1_H\} \underset{\substack{\uparrow \\ L6}}{=}$

$= \{c \mid \inf\{b,c\} = 0_H \,\&\, \sup\{b,c\} = 1_H\} =$

$= \urcorner_H b$

$\urcorner_H X = \{\urcorner_H a \mid a \in X\} = (T1c) =$ x/

$= \{\urcorner_H c \mid (\exists a \in X)\hat{c} = \hat{a}\} = (L2K2) =$

$= \{\urcorner_H c \mid c \in \hat{X}\} = (T1a) =$

$= \urcorner_H \hat{X}$

$\hat{X} = \hat{Y} \Longrightarrow \urcorner_H X = \urcorner_H \hat{X} = \urcorner_H \hat{Y} = \urcorner_H Y$

d/ következik az a/ -ból

e/ $\hat{a} = \hat{b} \Longrightarrow a \in \urcorner_H c \Longleftrightarrow \inf\{a,c\} = 0_H \,\&\, \sup\{a,c\} = 1_H \underset{\substack{\uparrow \\ L6}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow \inf\{b,c\} = 0_H \,\&\, \sup\{b,c\} = 1_H \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow b \in \urcorner_H c$

$\urcorner_H X \underset{\substack{\uparrow \\ T1a}}{=} \bigcup\{\urcorner_H b\ b \in X\} \underset{\substack{\uparrow \\ L1}}{\Longrightarrow} \urcorner_H X \in T^H$

x/ $A = (Tn) = B$ azt jelenti, hogy $A \underset{\substack{\uparrow \\ Tn}}{=} B$

$\vee_H$ -ra a/,b/ $X\vee_H Y = \bigcup\{\sup\{a,b\} \mid a\in X \,\&\, b\in Y\} =$

$$= \bigcup\{a\vee_H b \mid a\in X \,\&\, b\in Y\}$$

c/ $\hat a_1=\hat b_1 \,\&\, \hat a_2=\hat b_2 \Longrightarrow a\vee_H b = \sup\{a,b\} \underset{L6}{=} \sup\{a_1,b\} \underset{L6}{=}$

$$= \sup\{a_1,b_1\} = a_1\vee_H b_1$$

$\hat X_1=\hat Y_1 \,\&\, \hat X_2=\hat Y_2 \Longrightarrow X_1\vee_H X_2 = \bigcup\{a_1\vee_H a_2 \mid a_1\in X_1 \,\&\, a_2\in X_2\} =$

$$= \bigcup\{c_1\vee_H c_2 \mid (\exists a_1\in X_1, a_2\in X_2)\,\hat a_1=\hat c_1 \,\&\, \hat a_2=\hat c_2\} =$$

$$\underset{L2K2}{=} \bigcup\{c_1\vee_H c_2 \mid c_1\in\hat X_1 \,\&\, c_2\in\hat X_2\} =$$

$$= \hat X_1\vee_H\hat X_2 = \hat Y_1\vee_H\hat Y_2 = Y_1\vee_H Y_2$$

d/ következik az a/-ból

e/ $X\vee_H Y = \bigcup\{\sup\{a,b\} \mid a\in X \,\&\, b\in Y\} \underset{L7,L1}{\in} T^H$

$\wedge_H$-ra ugyanugy megy, mint $\vee_H$-ra.

2/ E pontban a $\overset{=}{\supset}$ jel az a/,c/-ben =-t, b/,d/-ben $\supset$-t jelent.

Legyen $f(X_1,\dots,X_n) = \neg_H f_1(X_1,\dots,X_n)$

a/,b/ Az indukciós feltevés: $f(X_1,\dots,X_n) \overset{=}{\supset} \bigcup\{fs \mid s\in X_1\times\dots\times X_n\}$

$f(X_1,\dots,X_n) = \neg_H f_1(X_1,\dots,X_n) \underset{T1a1}{=} \bigcup\{\neg_H a \mid a\in f_1(X_1,\dots,X_n)\} \overset{=}{\supset}$ /ind.felt./ $\overset{=}{\supset}$

$$\overset{=}{\supset} \bigcup\{\neg_H a \mid a\in\bigcup\{f_1 s \mid s\in X_1\times\dots\times X_n\}\} =$$

$$= \bigcup\{\bigcup\{\neg_H a \mid a\in f_1 s\} \mid s\in X_1\times\dots\times X_n\} =$$

$$= \bigcup\{\neg_H f_1 s \mid s\in X_1\times\dots\times X_n\} = \bigcup\{fs \mid s\in X_1\times\dots\times X_n\}$$

c/-d/ közvetlenül adódnak T1 bizonyitásának 1/ pontjából.

Legyen $f(X_1,\dots,X_n) = f_1(X_1,\dots,X_n) \vee_H f_2(X_1,\dots,X_n)$, ugy, hogy az

a/ esetben $f_1(X_1,\dots,X_n) = f_1(X_1,\dots,X_j) \& f_2(X_1,\dots,X_n) = f_2(X_{j+1},\dots,X_n)$

a/,b/ Az indukciós feltevés: $f_i\{X_1,\dots,X_n\} \overset{=}{\supset} \{f_i s \mid s \in X_1 \times \dots \times X_n\}$ $i=1,2$

$$f(X_1,\dots,X_n) = \cup\{a_1 \vee_H a_2 \mid a_i \in f_i(X_1,\dots X_n)\ i=1,2\} \overset{=}{\supset} /\text{ind.felt}/ \overset{=}{\supset}$$

$$\overset{=}{\supset} \cup\{a_1 \vee_H a_2 \mid a_i \in \cup\{f_i s \mid s \in \widehat{X}_1 \times \dots \times \widehat{X}_n\},\ i=1,2\} \overset{=}{\supset}$$

$$\overset{=}{\supset} \cup\{f_1 s \vee_H f_2 s \mid s \in \widehat{X}_1 \times \dots \times \widehat{X}_n\} = \cup\{f s \mid s \in \widehat{X}_1 \times \dots \times \widehat{X}_n\}$$

c/ Az indukciós feltevés: $\hat{X}_j = \hat{Y}_j,\ j=1,\dots,n \Longrightarrow f_i(X_1,\dots,X_n) = f_i(Y_1,\dots,Y_n), i=1,2$

d/ Az indukciós feltevés: $X_j \supset Y_j,\ j=1,\dots,n \Longrightarrow f_i(X_1,\dots,X_n) \supset f_i(Y_1,\dots,Y_n), i=1,2$

$$f(X_1,\dots,X_n) = \cup\{a_1 \vee_H a_2 \mid a_i \in f_i(X_1,\dots,X_n),\ i=1,2\} \overset{=}{\supset} /\text{ind.felt.}/ \overset{=}{\supset}$$

$$\overset{=}{\supset} \cup\{a_1 \vee_H a_n \mid a_i \in f_i(Y_1,\dots,Y_n),\ i=1,2\} =$$

$$= f(Y_1,\dots,Y_n)$$

e/ Az indukciós feltevés: ek $f_i(X_1,\dots,X_n) \in T^H$, $i=1,2$

$$f(X_1,\dots,X_n) = \cup\{\sup\{a_1,a_2\} \mid a_i \in f_i(X_1,\dots,X_n),\ i=1,2\} \underset{L7,L1}{\in} T^H$$

$\wedge_H$ -ra a bizonyitás ugyanugy megy, mint $\vee_H$-ra. ▲

<u>Következmények</u>: 1/ (T1K1) $(\forall f \in \hat{\Gamma}_H)\ \widetilde{f}(^{af}\widetilde{H}) = \widetilde{f}(^{af}B^H)$ ×/

2/ (T1K2) $\overline{RA}^2\ P_H, T^H$

3/ (T1K3) $(\forall f \in \hat{\Gamma}_H)\ f = \overset{af+1}{\Box}\ e_H \circ f$

<u>Bizonyitás</u>:

1/ Legyen $f \in \hat{\Gamma}_H$. Akkor

$$f(^{af}\widetilde{H}) = \{f(a_1,\dots,a_{af}) \mid a_i \in H,\ i=1,\dots,af\} \underset{T1c}{=} \{f(\hat{a}_1,\dots,\hat{a}_{af}) \mid a_i \in H, i=1,\dots af\} =$$

$$= \{f(\hat{a}_1,\dots,\hat{a}_{af}) \mid \hat{a}_i \in B^H,\ i=1,\dots,af\} = f(^{af}B^H)$$

×/ $\widetilde{H} \overset{d}{=} \{\{a\} / a \in H\}$; $\widetilde{f}$ definicióját l. 22.oldalon.

2/
$$\begin{tikzcd}
(\forall f\in\Gamma_H)\ f^{(af}(\pi H)) \subset T^H \arrow[dr] & & T^H \subset \pi H \arrow[dl, dashed] \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{Tld} \arrow[u] & \bar{Z}^2\ \Gamma_H, T^H \arrow[r, Rightarrow] & \overline{RA}^2\langle \Gamma_H, \pi H\rangle, T^H
\end{tikzcd}$$

3/ $\left(\overset{af+1}{\square} e_H \circ f\right)\left(x_1,\dots,x_{af}\right) = e_H\left(f\left(e_H x_1,\dots,e_H x_{af}\right)\right) = e_H\left(f\left(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{af}\right)\right) = (\mathrm{Tlc}) =$

$= e_H\left(f\left(x_1,\dots,x_{af}\right)\right) = (\mathrm{Tle}) = f\left(x_1,\dots,x_{af}\right)$ ▲

Nevezetes előrendezések:

Előháló $(\overline{EH})$

$\overline{EH}^2 \leq_H,\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \vec{V}_H({}^2\hat{H}) \subset B^H\ \&\ \vec{\Lambda}_H({}^2\hat{H}) \subset B^H$ /$\vec{f}$ definicióját l. 22.oldalon/

Komplementált előrendezés $(\overline{KER})$

$\overline{KER}^2 \leq_H,\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \vec{\neg}_H\ \hat{H} \subset B^H$

Komplementált előháló $(\overline{KEH})$

$\overline{KEH}\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{EH}\ H\ \&\ \overline{KER}\ H$

Disztributiv előháló $(\overline{DEH})$

$\overline{DEH}\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{EH}\ H\ \&\ (\forall a,b,c\in H)\ a\Lambda_H(bV_Hc)\ \nabla(a\Lambda_Hb)\ V_H(a\Lambda_Hc)$ ×/

Elő-Boole-algebra $(\overline{EBA})$

$\overline{EBA}\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{KEH}\ H\ \&\ \overline{DEH}\ H$

Megjegyezzük, hogy, amikor azt mondjuk, hogy H "elő-Boole-algebra", akkor az "algebra" szó a $\leq_H$ előrendezéssel generált P_H algebrát illeti. Ennek megfelelően:

$$\overline{EBA}^2 \leq_H, H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{EBA}\ P_H \quad \text{és}$$

$$\overline{BA}^2 \leq_H, H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{BA}\ P_H$$

×/

$A \nabla B \overset{d}{\Longleftrightarrow} A \cap B \neq \phi$; $\quad A \Delta B \overset{d}{\Longleftrightarrow} A \cap B = \phi$

<u>Lemma 8</u>: $\overline{KEH}\ H \Longrightarrow 0_H \in B^H \ \& \ 1_H \in B^H$

Bizonyitás:

$$\begin{tikzcd}
\overline{KEH}\ H \arrow[r, Rightarrow] & \neg_H \widehat{H} \subset B^H \arrow[d, Rightarrow] & \phi \notin B^H \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dddl, Rightarrow] \\
& \neg_H a \neq \phi \arrow[d, Rightarrow] & \\
& 1_H \neq \phi \arrow[d, Rightarrow, "L3"'] & \\
& 1_H \in B^H &
\end{tikzcd}$$

A bizonyitás 0_H-ra ugyanigy megy ▲

<u>Következmény (L8K)</u>: $\overline{KEH}\ H \Longleftrightarrow \overline{RA}^2\ P_H,\ B^H$

Bizonyitás:

I.

$$\begin{tikzcd}
& & \overline{KEH}\ H \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \overline{KER}\ H \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddl, Rightarrow, "L9"'] & & \overline{EH}\ H \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \neg_H \widehat{H} \subset B^H \arrow[d, Rightarrow, "T2K1"] & & \vee_H(^2\widehat{H}) \subset B^H \arrow[d, Rightarrow, "T2K1"] & \wedge_H(^2\widehat{H}) \subset B^H \arrow[d, Rightarrow, "T2K1"] \\
1_H \in B^H \ \& \ 0_H \in B^H \arrow[drr, Rightarrow] & \neg_H B^H \subset B^H \arrow[dr, Rightarrow] & & \vee_H(^2B^H) \subset B^H \arrow[dl, Rightarrow] & \wedge_H(^2B^H) \subset B^H \arrow[dll, Rightarrow] \\
& & RA^2 \langle \Gamma_H, \pi H \rangle, B^H & &
\end{tikzcd}$$

II.

$$\overline{RA}^2 P_H, B^H \Longrightarrow \overline{Z}^2 \Omega_H, B^H \Longrightarrow \neg_H B^H \cup \vee_H(^2B^H) \cup \wedge_H(^2B^H) \subset B^H \xRightarrow[\text{T1K1}]{} $$

$$\Longrightarrow \neg_H \widehat{H} \cup \vee_H(^2\widehat{H}) \cup \wedge_H(^2\widehat{H}) \subset B^H \Longrightarrow \overline{KEH}\ H$$

▲

<u>Lemma 9</u>: $\bar{Z}^2 F,A \Longleftrightarrow \bar{Z}^2\ \hat{F},A$

Bizonyitás:

I. $\bar{Z}^2\hat{F},A \Longrightarrow (\forall f\in F)\ \vec{f}({}^{af}A)\subset A \Longrightarrow (\forall f\in F)\ \vec{f}({}^{af}A)\subset A \Longrightarrow \bar{Z}^2 F,A$

II. indukcióval

1/ $\bar{Z}^2 F,A \Longrightarrow (\forall f\in F)\ \vec{f}({}^{af}A)\subset A$

2/ Legyen $g\in\hat{F}$ definiciója a következő alaku: $gs = f(f_1 s_1,\dots,f_n s_n)$,

ahol $f\in F, f_i\in\hat{F}\cup\{\Delta_A\}$ és $s\in{}^{ag}V$, $s_i\in{}^{af_i}V$, ahol V a változójelek halmaza.

Az indukciós feltevés: $(\forall i\in[1,n])\, f_i({}^{af_i}A)\subset A$, és $f({}^{n}A)\subset A$

$$\vec{g}({}^{ag}A) = \vec{f}\left(\vec{f}_1({}^{af_1}A)\times\dots\times\vec{f}_n({}^{af_n}A)\right) \subset \vec{f}({}^{n}A) \subset A$$

indukciós feltétel ▲

<u>Következmények</u>: 1/ (L9K1) $\overline{EH}\ H \Longleftrightarrow \bar{Z}^2\ \widehat{\{V_H,\Lambda_H\}},\ B^H$

2/ (L9K2) $\overline{KEH}\ H \Longleftrightarrow \bar{Z}^2\ \widehat{\Gamma_H\setminus\{V_H,\Lambda_H\}},\ B^H$

3/ (L9K3) $\overline{KEH}\ H \Longleftrightarrow \bar{Z}^2\ \hat{\Gamma}_H\ ,\ B^H$

Bizonyitás:

1/ $\overline{EH}\ H \Longleftrightarrow V_H({}^2\hat{H})\subset B^H \ \&\ \Lambda_H({}^2\hat{H})\subset B^H \Longleftrightarrow (T2K1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow V_H({}^2B^H)\subset B^H \ \&\ \Lambda_H({}^2B^H)\subset B^H \Longleftrightarrow \bar{Z}^2\{V_H,\Lambda_H\},\ B^H \Longleftrightarrow (L9) \Longleftrightarrow \bar{Z}^2\ \widehat{\{\Lambda_H,V_H\}},\ B^H$

2/

$$\begin{tikzcd}
\overline{KER}\ H \arrow[r, Rightarrow, "L8"'] \arrow[d, Rightarrow] & 0_H\in B^H \,\&\, 1_H\in B^H \arrow[dd, Rightarrow] & \\
\urcorner_H\hat{H}\subset B^H \arrow[d, Rightarrow, "T1K1"] & & \bar{Z}^2\ \widehat{\Gamma_H\setminus\{\Lambda_H,V_H\}}\ ,\ B^H \arrow[d, Leftrightarrow, "L9"] \\
\urcorner_H B^H\subset B^H \arrow[r, Rightarrow] & \bar{Z}^2\,\Gamma_H\setminus\{V_H,\Lambda_H\},B^H \arrow[d, Rightarrow] & \bar{Z}^2\ \Gamma_H\setminus\{\Lambda_H,V_H\},\ B^H \\
& \bar{Z}^2\ \urcorner_H,B^H \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \urcorner_H B^H\subset B^H \arrow[d, Rightarrow, "T2K1"'] & \\
& \urcorner_H\hat{H}\subset B^H \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \overline{KER}\ H &
\end{tikzcd}$$

3/ $$\overline{KEH}\ H \underset{\uparrow\ \text{L8K}}{\Longleftrightarrow} \overline{RA}^2 P_H, B^H \Longleftrightarrow \bar{\bar{Z}}^2\Gamma_H, B^H \underset{\uparrow\ \text{L9}}{\Longleftrightarrow} \bar{\bar{Z}}^2\hat{\Gamma}_H, B^H$$ ▲

Lemma 10: a/ $\overline{ER}\ H \Rightarrow a\wedge_H a = a\vee_H a = \hat{a}$

b/ $\overline{KER}\ H \Rightarrow \neg_H^2 a = \hat{a}$

Bizonyitás:

a/ $$\overline{ER}\ H \Longrightarrow a \leq a \ \&\ (b\leq a \Rightarrow b\leq a)$$

$$\Downarrow$$

$$a\wedge_H a = \hat{a} \Longleftarrow a\in \inf\{a,a\} = a\wedge_H a$$

$\vee_H$-ra ugyanugy megy a bizonyitás

b/ $$\neg_H^2 a = \neg_H(\neg_H a) \underset{\uparrow\ \text{T1a}}{=} \bigcup\{\neg_H b \mid b\in\neg_H a\} \underset{\uparrow\ \text{L4}}{=} \bigcup\{\neg_H b \mid a\in\neg_H b\}$$

$$\overline{KER}\ H \Rightarrow \neg_H a \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup\{\neg_H b \mid a\in\neg_H b\} \neq \emptyset \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a\in \bigcup\{\neg_H b \mid a\in\neg_H b\} \Longrightarrow a\in\neg_H^2 a \Longrightarrow \hat{a} = \neg_H^2 a$$ ▲

Megjegyzés az EH, KER és DEH definiciójához:

a/ (M1a) $\overline{EH}\ H \Longleftrightarrow \vee_H(2^{\hat{H}}) = \wedge_H(2^{\hat{H}}) = B^H$

b/ (M1b) $\overline{KER}\ H \Longleftrightarrow \neg_H\hat{H} = B^H$

c/ (M1c) $\overline{DEH}\ H \Longleftrightarrow \overline{EH}\ H \ \&\ (\forall a,b,c\in H)\ a\wedge_H(b\vee_H c) = (a\wedge_H b)\vee_H(a\wedge_H c)$

Bizonyitás:

a/ 1. $\vee_H(2^{\hat{H}}) = \wedge_H(2^{\hat{H}}) = B^H \Longrightarrow \vee_H(2^{\hat{H}})\subset B^H \ \&\ \wedge_H(2^{\hat{H}})\subset B^H$

2. $$\overline{EH}\ H \underset{\uparrow\ \text{L10a}}{\Longrightarrow} (\forall\hat{a}\in B^H)\,\hat{a} = a\wedge_H a \Longrightarrow (\forall\hat{a}\in B^H)\,\hat{a}\in\wedge_H(2^{\hat{H}}) \Longrightarrow B^H\subset\wedge_H(2^{\hat{H}})$$

$$\Big\Downarrow \ \overline{EH}\ H$$

$$B^H = \wedge_H(2^{\hat{H}})$$

b/ 1. $\neg_H(\vec{H}) = B^H \Longrightarrow \neg_H(\vec{H}) \subset B^H$

2. $\overline{KER}\ H \underset{\uparrow\,\text{L1Ob}}{\Longrightarrow} (\forall \hat{a} \in B^H)\,\hat{a} = \neg_H(\neg_H a) \underset{\uparrow\,\text{L9K2}}{\Longrightarrow} (\forall \hat{a} \in B^H)(\exists b \in \neg_H a)\,\hat{a} = \neg_H b$

c/ A bizonyitás során az $a \wedge_H (b \vee_H c)$ jelsorozatot A-val, az $(a \wedge_H b) \vee_H (a \wedge_H c)$ jelsorozatot pedig B-vel jelöljük

1. $\overline{EH}\ H \,\&\, (\forall a,b,c \in H)\, A = B \Longrightarrow \overline{EH}\ H \,\&\, (\forall a,b,c \in H)\, A \nabla B \Longrightarrow \overline{DEH}\ H$

2. $\overline{DEH}\ H \Longrightarrow \overline{EH}\ H \,\&\, (\forall a,b,c \in H)\, A \nabla B \underset{\text{L9K1}}{\Longrightarrow} (\forall a,b,c \in H)\ A \in B^H \,\&\, B \in B^H \Longrightarrow \overline{EH}\ H \,\&\, (\forall a,b,c \in H)\, A = B$ ▲

$$\mathcal{C}_H \overset{d}{=} \{x \mid x \wedge_H x = x \vee_H x = x\}$$

$$\mathcal{C}_{\neg_H^2} \overset{d}{=} \{x \mid \neg_H^2 x = x\}$$

<u>Tétel 2</u>: $\overline{KER}\ H \Longleftrightarrow (\forall x \in \pi H)\ \neg_H^2 x = \hat{x}$

Bizonyitás:

1. $\neg_H^2 x \underset{\uparrow\,\text{T1a}}{=} \bigcup\{\neg_H^2 a \mid a \in x\} \underset{\uparrow\,\text{L1Ob}}{=} \bigcup\{\hat{a} \mid a \in x\} \underset{\uparrow\,\text{L2K2}}{=} \hat{x}$

2. $(\forall x \in \pi H)\ \neg_H^2 x = \hat{x} \Longrightarrow \neg_H^2 a = \hat{a} \Longrightarrow \neg_H(\neg_H a) = \hat{a} \underset{\uparrow\,\text{T1a}}{\Longrightarrow} (\overset{d}{\exists} b \in H)\, b \in \neg_H a \Longrightarrow$

$\underset{\uparrow\,\text{T1d}}{\Longrightarrow} \neg_H b \subset \neg_H^2 a \underset{\uparrow\,\text{T1e}}{\Longrightarrow} \neg_H b = \hat{a} \Longrightarrow \neg_H^2 b = \neg_H \hat{a} \underset{\uparrow\,\text{feltétel, T1c}}{\Longrightarrow} \neg_H a = \hat{b}$ ▲

<u>Következmény /T2K/</u>: $\overline{KER}\ H \Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\neg_H^2} = T^H$

Bizonyitás: $\mathcal{C}_{\neg_H^2} = \{x \mid \neg_H^2 x = x\} \underset{\updownarrow\,\text{KER}}{=} \{x \mid \hat{x} = x\} = T^H$ ▲

<u>Tétel 3</u>: a/ $\overline{EH}\ H \longrightarrow B^H = \min_{\subset}(\mathcal{C}_H \setminus \{\phi\})$

b/ $\overline{KER}\ H \longrightarrow B^H = \min_{\subset}\left(\mathcal{C}_{\urcorner_H^2} \setminus \{\phi\}\right)$

Bizonyitás:

$$\text{a/ } \overline{EH}\ H \underset{\text{L10a,T1K1}}{\longrightarrow} (\forall a \in H)\, \hat{a} \in \mathcal{C}_H \longrightarrow B^H \subset \mathcal{C}_H \underset{\text{T1e}}{\subset} T^H \underset{\text{L2K3}}{\longrightarrow} B^H = \min_{\subset}(\mathcal{C}_H \setminus \{\phi\})$$

$$\text{b/ } \overline{KER}\ H \underset{\text{T3K}}{\longrightarrow} \mathcal{C}_{\urcorner_H^2} = T^H \underset{\text{L2K3}}{\longrightarrow} B^H = \min_{\subset}\left(\mathcal{C}_{\urcorner_H^2} \setminus \{\phi\}\right)$$

▲

$$\langle \leq_{B^H}, B^H \rangle \overset{d}{\equiv} \langle \leq_H, H \rangle / \leq_H^{\varepsilon}$$

Megjegyzés: $\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle \in \leq_{B^H} \longleftrightarrow \langle a, b \rangle \in \leq_H$, mert $\overline{\forall K}^2\ \leq_H^{\varepsilon}, \langle \leq_H, H \rangle$

Megjegyezzük, hogy $\overline{ER}^2\ \leq_{B^H}, B^H$, sőt rendezés is.

A továbbiakban $\leq_{B^H}$ helyett $\leq_B$ -t, $\alpha \in \hat{\Gamma}$ -re α_{B^H} helyett α_B -t és Γ_{B^H} helyett Γ_B -t irunk.

<u>Lemma 11</u>: $\inf_{\leq_H, H} X = \inf_{\leq_B, B^H} \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_H(X)$ & $\sup_{\leq_H, H} X = \sup_{\leq_B, B^H} \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_H(X)$

Bizonyitás:

$\inf_{\leq_H, H}$; $\inf_{\leq_B, B^H}$ helyett $\inf_H$; $\inf_B$ -t irunk.

$$\begin{array}{ccccccc} a \in \inf_H X & \longleftrightarrow & a \in H & \& & a \times X \subset \leq_H & \& & (b \times X \subset \leq_H \longrightarrow b \leq_H a) \\ & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \hat{a} \in \inf_B \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_H(X) & \longleftrightarrow & \hat{a} \in B^H & \& & \hat{a} \times \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_H(X) \subset \leq_B & \& & (\hat{b} \times \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_H(X) \subset \leq_B \longrightarrow \hat{b} \leq_B \hat{a}) \end{array}$$

$$\left(a \in \inf_H X \longleftrightarrow \hat{a} \in \inf_B \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_H(X)\right) \longrightarrow \inf_H X = \inf_B \overset{\vee\varepsilon}{\leq}_B(X)$$

A bizonyitás sup -ra ugyanigy megy. ▲

<u>Tétel 4</u>: a/ $\overline{KEH}\ H \longrightarrow (\forall f\in\hat{\Gamma})\, f_H\big|_{B^H} = f_B\big|_{B^H}$

b/ $\overline{KEH}\ H \longrightarrow f_B\left(af_{B^H}\right) \subset B^H$

Bizonyitás:

a/ indukcióval /a1 és a2 lépésekben/

a1. $0_H = \inf_H H \underset{\substack{\uparrow \\ L11}}{=} \inf_B B^H = 0_B$

$1_H = 1_B$ bizonyitása ugyanigy megy.

$$\hat{a}\wedge_H \hat{b} \underset{\substack{\uparrow \\ T1c}}{=} a\wedge_H b = \inf_H\{a,b\} \underset{\substack{\uparrow \\ L11}}{=} \inf\{\hat{a},\hat{b}\} = \hat{a}\wedge_B \hat{b}$$

$\hat{a}\vee_H \hat{b} = \hat{a}\vee_B \hat{b}$ bizonyitása ugyanigy megy.

$$\neg_H \hat{a} \underset{\substack{\uparrow \\ T1c}}{=} \neg_H a = \{b \mid a\wedge_H b = 0_H \ \&\ a\vee_H b = 1_H\} \underset{\substack{\uparrow \\ L11}}{=} \{\hat{b} \mid \hat{a}\wedge_B \hat{b} = 0_B \ \&\ \hat{a}\vee_B \hat{b} = 1_B\} = \neg_B \hat{a}$$

$$(\forall f\in\Gamma)\, f_B\left(af_{B^H}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ T4a1}}{=} f_H\left(af_{B^H}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ T1K1}}{=} f_H\left(af_{\hat{H}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ KEH,L8}}{\subset} B^H \Longrightarrow \overline{Z}^2\ \Gamma_B, B^H \underset{\substack{\uparrow \\ L9}}{\Longrightarrow} \overline{Z}^2\ \hat{\Gamma}_B, B^H$$

a2. Legyen f definiciója $fs = \neg gs$ alaku

Az indukciós feltevés: $g_H\big|_{B^H} = g_B\big|_{B^H}$

$$f_H\big|_{B^H} = \left(g_H\circ\neg_H\right)\big|_{B^H} =$$

$$= \left(g_H\big|_{B^H}\right)\circ\neg_H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind.felt}}}{=} \left(g_B\big|_{B^H}\right)\circ\neg_H \underset{\substack{\uparrow \\ T4b}}{=} \left(g_B\big|_{B^H}\right)\circ\neg_H\big|_{B^H} \underset{\substack{\uparrow \\ T4a1}}{=} \left(g_B\big|_{B^H}\right)\circ\neg_B\big|_{B^H} =$$

$$= \left(g_B\circ\neg_B\right)\big|_{B^H} = f_B\big|_{B^H}.$$

A bizonyitás $f_1 V f_2$, $f_1 \wedge f_2$ -re ugyanigy megy. ▲

Következmény: /T4K/: $\overline{\text{E}}$BA H $\Rightarrow$ BA $\langle \le_B, B^H \rangle$

Bizonyitás:

B^H háló, mert $\inf_B(\hat{a},\hat{b})$, $\sup_B(\hat{a},\hat{b}) \in B^H$

T4b

B^H komplementált, mert $\hat{1}_B \hat{a} \in B^H$

T4b

B^H disztributiv, mert

$$a\wedge_H(b\vee_H c) = (a\wedge_H b) \vee_H (a\wedge_H c) \Rightarrow \hat{a}\wedge_B(\hat{b}\vee_B\hat{c}) = (\hat{a}\wedge_B\hat{b}) \vee_B (\hat{a}\wedge_B\hat{c})$$

T4a

E három állitásból következik /[1]/, hogy BA $\langle \le_B, B^H \rangle$. ▲

Megjegyezzük, hogy az általánositás halmazmüveletekre természetes volt, ugyanis

legyen $\overline{\text{B}}$A$\langle \Gamma, B \rangle$. Ekkor

$$\Gamma_B = \{\hat{f} \mid f \in \Gamma\} \quad \text{, ahol}$$

ha $f: {}^{af}B \to B$, akkor $\hat{f}: P({}^{af}B) \to P B$, ugy, hogy ha $D \subset {}^{af}B$, akkor

$$\hat{f}(D) \overset{d}{=} \{fs \mid s \in D\}$$

$$\hat{f}': {}^{af}(P B) \to P B, \quad \text{ugy, hogy}$$

$$\hat{f}'(X_1,\dots,X_{af}) \overset{d}{=} f(X_1 \dots X_{af})$$

Lemma 12: Legyen $f,g \in \hat{\Gamma}$ és $f=g$ Boole-algebrai azonosság. Ekkor

$$\text{EBA } H \Rightarrow f_H\Big|_{\hat{H}} = g_H\Big|_{\hat{H}}$$

Bizonyitás:

$$\underset{\underset{\mathrm{T1c}}{\uparrow}}{f_H\big|_{\hat{H}}} = \underset{\underset{\mathrm{T4a}}{\uparrow}}{f_H\big|_{B^H}} = f_B\big|_{B^H} = \underset{\underset{\mathrm{T4K}}{\uparrow}}{g_B\big|_{B^H}} = \underset{\underset{\mathrm{T4a}}{\uparrow}}{g_H\big|_{B^H}} = \underset{\underset{\mathrm{T1c}}{\uparrow}}{g_H\big|_{\hat{H}}}$$

▲

2.3. Szürők és osztályozó részalgebrák

Szürő ($\overline{\text{SÜ}}$)

$\overline{\text{SÜ}}^2 H,S \overset{d}{\Longleftrightarrow} S\wedge_H S \subset S \;\&\; SV_H H \subset S \;\&\; S \supset \sup H$

$\overline{\text{SÜ}}^3 r,H,S \overset{d}{\Longleftrightarrow} r\big|_H = \leq_H \;\&\; \overline{\text{SÜ}}^2 H,S$ *⁄

Valódi szürő /$\overline{\text{VSÜ}}$/

$\overline{\text{VSÜ}}^2 H,S \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{\text{SÜ}}^2 H,S \;\&\; S \neq H$

<u>Megjegyzések</u> a SÜ definiciójához:

a/ (M2a) $S\wedge_H S \subset S \Longleftrightarrow S\wedge_H S = S \Longleftrightarrow \pi S\wedge_H \pi S \subset \pi S$

$SV_H H \subset S \Longleftrightarrow SV_H H = S \Longleftrightarrow \pi S \; V_H \pi H \subset \pi S$

b/ (M2b) $\overline{\text{SÜ}}^2 H,S \Longleftrightarrow S \in \ell_H \;\&\; SV_H H \subset S \,\&\, \sup H \subset S$

c/ (M2c) $\overline{\text{SÜ}}^2 H,S \Longleftrightarrow (\forall a,b \in S)\big(a\wedge_H b \subset S \,\&\, (a \leq_H c \Longrightarrow c \in S)\big) \;\&\; S \supset \sup H$

Bizonyitás:

a/ $S\wedge_H S = \bigcup\{a\wedge_H b \mid a,b \in S\} \supset \bigcup\{a\wedge_H a \mid a \in S\} \underset{\underset{\mathrm{L1O}}{\uparrow}}{\supset} \bigcup\{a \mid a \in S\} = S$

$SV_H H \supset \bigcup\{aV_H a \mid a \in S\} \underset{\underset{\mathrm{L1O}}{\uparrow}}{\supset} S$

$\pi S\tilde{\wedge}_H \pi S \subset \pi S \;\&\; S\wedge_H S \in \pi S\tilde{\wedge}_H \pi S \Longrightarrow S\wedge_H S \in \pi S \Longrightarrow S\wedge_H S \subset S$

$X,Y \in \pi S \Longrightarrow X\wedge_H Y = \bigcup\{a\wedge_H b \mid a \in X, b \in Y\} \subset \pi S = S$

A $\pi S\tilde{V}_H \pi H \subset \pi S \Longleftrightarrow SV_H H \subset S$ állitás bizonyitása hasonlóan megy.

---

*⁄ a továbbiakban S a H egy tetszőleges szürőjét jelenti.

b/ $SV_H H \subset S \overset{}{\underset{\text{T1d}}{\Longrightarrow}} SV_H S \subset S \overset{}{\underset{\text{M2a}}{\Longrightarrow}} SV_H S = S$

c/

$$\begin{tikzcd}
S\wedge_H S \subset S \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{T1d}"'] \\
(\forall a,b\in S)\, a\wedge_H b \subset S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & SV_H H \subset S \arrow[d, Leftrightarrow] \\
a \le_H c \arrow[r, leftrightarrow] & aV_H c = c \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
 & (\forall a\in S)(a \le_H c \Rightarrow c\in S)
\end{tikzcd}$$

▲

<u>Lemma 13</u>: $S\overline{U}^2 H, A \Longrightarrow 1_H \subset S$

Bizonyitás: következik a definicióból, mivel $1_H = \sup H$

▲

Algebrai zárt halmazrendszer ($\overline{AZR}$)

$$\overline{AZR}\ \mathscr{C} \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\exists \mathscr{A})\, \mathscr{C} = \{A \mid \overline{RA}^2\, \mathscr{A}, A\}$$

<u>Tétel 5</u>: $\overline{AZR}\ \{S \mid \overline{SU}^2 H, S\}$

Bizonyitás:

$$\mathscr{A} \overset{d}{=} \langle \{\mathscr{C}_c, k_c \mid c\in H\},\ a_{\mathscr{A}}, H, \sigma \rangle, \quad \text{ahol}$$

$$a_{\mathscr{A}} \overset{d}{=} \{\langle \mathscr{C}_c, 1\rangle, \langle k_c, 2\rangle \mid c\in H\} \quad \text{és}$$

$$\sigma\mathscr{C}_a \overset{d}{=} \{\langle b,a\rangle \mid b \le_H a\} \cup \{\langle b,b\rangle \mid b \not\le_H a\}$$

$$\sigma k_a \overset{d}{=} \{\langle b,c,a\rangle \mid a\in b\wedge_H c\} \cup \{\langle b,c,b\rangle \mid a\notin b\wedge_H c\}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overline{SU}^2 H,S & \\
(\forall a,b\in S)(\forall c\in a\wedge_H b)\,c\in S \arrow[ur, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \longleftarrow M2c \longrightarrow & (\forall a\in S)(\forall a\le_H c)\,c\in S \arrow[ul, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\begin{array}{l}(\forall a,b\in S)(\forall c\in a\wedge_H b)\,\sigma k_c(a,b)=c\in S\\ \&\ (\forall a,b\in S)(\forall c\notin a\wedge_H b)\,\sigma k_c(a,b)=a\in S\end{array} \arrow[d, Leftrightarrow] & & \begin{array}{l}(\forall a\in S)(\forall a\le_H c)\,\sigma\mathcal{C}_c a = c\in S\ \&\\ (\forall a\in S)(\forall a\not\le_H c)\,\sigma\mathcal{C}_c a = a\in S\end{array} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\overline{Z}^2\{\sigma k_c \mid c\in H\},S \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \overline{Z}^2\{\sigma\mathcal{C}_c \mid c\in H\},S \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
 & \overline{RA}^2\,\mathcal{L}\mathcal{G},S &
\end{tikzcd}
$$

▲

A továbbiakban a 2. fejezet végéig legyen mindig $\overline{EBA}\ H$ és $\overline{SU}^2 H,S$, ha másképp nem tesszük fel.

$$a \equiv_S b \overset{d}{\Longleftrightarrow} a \leftrightarrow_H b \subset S \qquad \text{ahol} \quad \leftrightarrow\ \in \hat{\Omega}$$

$$a \leftrightarrow_H b \overset{d}{\equiv} (\neg_H a \vee_H b) \wedge_H (a \vee_H \neg_H b)$$

Ekvivalencia $(\overline{EQ})$

$$\overline{EQ}^2 r,H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{ER}^2 r,H\ \&\ r=r^{-1}$$

<u>Tétel 6</u>: a/ $\overline{EQ}^2 \equiv_S, H$

b/ $\equiv_S 1_H = S$

c/ $S\in H/_{\equiv S}$

d/ $S_1 \subset S \longrightarrow \equiv_{S_1} \subset \equiv_S$

Bizonyitás:

a/ $$a\equiv_S a \Longleftarrow a\leftrightarrow_H a \underset{L12}{=} 1_H \underset{L13}{\subset} S$$

$$\begin{tikzcd}
a\equiv_S b \arrow[d, Rightarrow] & \& & b\equiv_S c \arrow[d, Rightarrow] & & a\equiv_S c \\
a\leftrightarrow_H b\subset S \arrow[dr, Rightarrow] & & & b\leftrightarrow_H c\subset S \arrow[dll, Rightarrow] & & a\leftrightarrow_H c\subset S \arrow[u, Rightarrow] \\
 & S\supset(a\leftrightarrow_H b)\wedge_H(b\leftrightarrow_H a) & & = & & (a\leftrightarrow_H b)\wedge_H(a\leftrightarrow_H c) \arrow[u, Rightarrow] \\
 & & & L12 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

$$(a\equiv_S b \Longleftrightarrow b\equiv_S a) \Longleftarrow a\leftrightarrow_H b \underset{L12}{=} b\leftrightarrow_H a$$

b/-c/
$$\begin{tikzcd}
a\in 1_H \arrow[ddr, Rightarrow] & \& & a\equiv_S b \arrow[d, Rightarrow] \\
L12 \arrow[rr] & & & a\leftrightarrow_H b\subset S \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & \hat{b}\subset S \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & b\in S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\in 1_H \arrow[d, Rightarrow] & \& & b\in S \arrow[d, Rightarrow] \\
a\leftrightarrow_H b=\hat{b} \arrow[dr, Rightarrow] & & & \hat{b}\subset S \arrow[dll, Rightarrow] \\
 & a\equiv_S b \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & b\in\equiv_S 1_H & &
\end{tikzcd}$$

d/
$$\begin{tikzcd}
S_1\subset S \arrow[ddr, Rightarrow] & \langle a,b\rangle\in\equiv_{S_1} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & a\leftrightarrow_H b\subset S_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
 & a\leftrightarrow_H b\subset S \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \langle a,b\rangle\in\equiv_S
\end{tikzcd}$$

▲

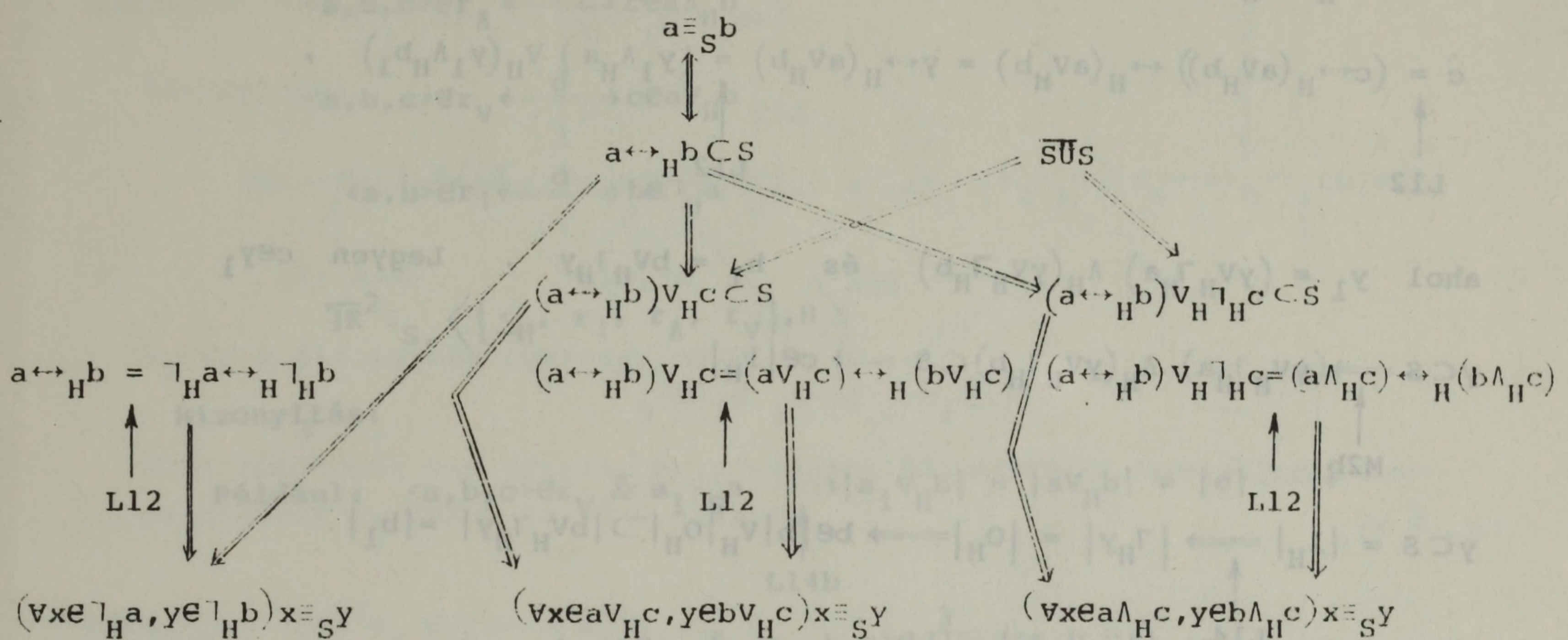
<u>Lemma 14</u>:

a/ $a \equiv_S b \Longrightarrow (\forall x \in \neg_H a, y \in \neg_H b)\, x \equiv_S y$

b/ $a \equiv_S b \Longrightarrow (\forall x \in a \vee_H c, y \in b \vee_H c)\, x \equiv_S y$

c/ $a \equiv_S b \Longrightarrow (\forall x \in a \wedge_H c, y \in b \wedge_H c)\, x \equiv_S y$

Bizonyitás:



▲

L14 ugy is fogalmazható, hogy $(\forall f \in \Omega_H)\ f(\equiv_S a_1, \dots, \equiv_S a_{af}) \subset \equiv_S f(a_1, \dots, a_{af})$.

<u>Lemma 15</u>: Jelöljük $|X|$-el $\equiv_S X$ -t. Ekkor

a/ $(\forall c \in |\neg_H a|)(\exists c_1 \in |a|)\ c_1 \in \neg_H c$

b/ $(\forall c \in |a \vee_H b|)(\exists a_1 \in |a|, b_1 \in |b|)\ c \in a_1 \vee_H b_1$

c/ $(\forall c \in |a \wedge_H b|)(\exists a_1 \in |a|, b_1 \in |b|)\ c \in a_1 \wedge_H b_1$

Bizonyitás:

a/ $c \in |\neg_H a| \Longrightarrow (\forall y \in \neg_H a)\, c \equiv_S y \xRightarrow[\text{L14a}]{} (\forall y \in \neg_H a, y_1 \in \neg_H y, c_1 \in \neg_H c)\, c_1 \equiv_S y \xRightarrow[\text{T1a}]{}$

$\Longrightarrow (\forall y_1 \in \neg_H^2 a, c_1 \in \neg_H c)\, c_1 \equiv_S y \xRightarrow[\text{L10b}]{} (\forall c_1 \in \neg_H c)\, c_1 \equiv a \xRightarrow[\overline{\text{KEH}}\ \text{H}]{} (\exists c_1 \in \neg_H c)\, c_1 \in |a|$

b/ $c\in|aV_Hb|$ $\quad (\forall y\in aV_Hb)c\leftrightarrow_H y\subset S \Rightarrow \bigcup\{c\leftrightarrow_H y\,|\,y\in aV_Hb\}\subset S \underset{T1a}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow c\leftrightarrow_H(aV_Hb)\subset S$$

$$y \overset{d}{=} c\leftrightarrow_H(aV_Hb)$$

$$\hat{c} \underset{L12}{=} \big(c\leftrightarrow_H(aV_Hb)\big)\leftrightarrow_H(aV_Hb) = y\leftrightarrow_H(aV_Hb) \underset{L12}{=} (y_1\wedge_H a)\,V_H(y_1\wedge_H b_1) \quad ,$$

ahol $y_1=(yV_H\neg_H a)\wedge_H(yV_H\neg_H b)$ és $b_1=bV_H\neg_H y$. Legyen $c\in y_1$

$$y\subset S \underset{M2b}{\Longrightarrow} (yV_H\neg_H a)\wedge_H(yV_H\neg_H b)\subset S\Longrightarrow c\in|1_H|$$

$$y\subset S=|1_H|\underset{L14}{\Longrightarrow}|\neg_H y|=|0_H|\Longrightarrow b\in|b|V_H|0_H|\supset|bV_H\neg_H y|=|b_1|$$

$$|b_1|=|bV_H\neg_H y|\supset|b|V_H|0_H|\ni b$$

$$y_1\wedge_H a\supset c\wedge_H a\Longrightarrow|y_1\wedge_H a|=|c\wedge_H a|=|1_H\wedge_H a|=|a|\Longrightarrow y_1\wedge_H a\subset|a|$$

$$y_1\wedge_H b_1\supset c\wedge_H b\Longrightarrow y_1\wedge_H b_1\subset|b|$$

$$\hat{c}=(y_1\wedge_H a)\,V_H(y_1\wedge_H b_1)\Longrightarrow(\exists a_2\in|a|,b_2\in|b|)\,c\in a_2V_Hb_2$$

c/ $c\in|a\wedge_H b|\Longrightarrow\neg_H c\subset\neg_H|a\wedge_H b|=|\neg_H(a\wedge_H b)|\underset{L12}{=}|\neg_H aV_H\neg_H b|=|\neg_H a|V_H|\neg_H b|\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow(\forall c_1\in\neg_H c)(\exists a_1\in\neg_H a,b_1\in\neg_H b)\,c_1=a_1V_Hb_1\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(\forall c_1\in\neg_H c)(\exists a_1\in\neg_H a,b_1\in\neg_H b)\,\neg_H c_1=\neg_H a_1\wedge_H\neg_H b_1\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(\exists a_2\in\neg_H a_1,b_2\in\neg_H b_1)\,c=a_2V_Hb_2\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(\exists a_2\in|a|,b_2\in|b|)\,c=a_2V_Hb_2$$

▲

L15 ugy is fogalmazható, hogy $(\forall f\in\Omega_H)\ f({}_{S}a_1,\dots,{}_{S}a_{af}) \supset {}_{S} f(a_1,\dots,a_{af})$

Következmény: (L15K)

Legyenek a $r_\wedge,\ r_\vee \subset {}^3H,\ r_\neg \subset {}^2H$ relációk a következők:

$$\langle a,b,c\rangle \in r_\wedge \overset{d}{\Longleftrightarrow} c\in a\wedge_H b$$

$$\langle a,b,c\rangle \in r_\vee \overset{d}{\Longleftrightarrow} c\in a\vee_H b$$

$$\langle a,b\rangle \in r_\neg \overset{d}{\Longleftrightarrow} b\in \neg_H a$$

$$\exists K^2 \equiv_S,\ \langle \{\leq_H,\ r_\neg,\ r_\wedge,\ r_\vee\}, H\rangle$$

Bizonyitás:

Például: $\langle a,b,c\rangle \in r_\vee \ \&\ a_1 \equiv_S a \xrightarrow[\text{L14b}]{} |a_1 \vee_H b| = |a\vee_H b| = |c| \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \langle a_1,b,c\rangle \in r_\vee \ \&\ \langle a_1,b,c\rangle \in \overset{3}{\square}\equiv_S(\langle a,b,c\rangle)$$

$$\langle a,b,c\rangle \in r_\vee \ \&\ c_1 \equiv_S c \xrightarrow[\text{L15b}]{} (\exists a_1 \equiv_S a, b_1 \equiv_S b)\ \langle a_1,b_1,c_1\rangle \in r_\vee$$

$r_\wedge$ -re és $r_\neg$ -re a bizonyitás ugyanigy megy.

$$\langle a,b\rangle \in \leq_H \ \&\ a_1 \equiv_S a \longrightarrow a\in a\wedge_H b \ \&\ a_1 \equiv_S a \longrightarrow a_1 \in |a\wedge_H b| \xrightarrow[\text{L15c}]{}$$

$$\rightarrow (\exists a_2 \in |a|,\ b_2 \in |b|)\ a_1 \in a_2 \wedge_H b_2 \Longrightarrow (\exists b_2 \in |b|)\ a_1 \leq_H b_2$$

▲

Tétel 7: a/ $S_1 \subset S \longrightarrow \overline{\forall K}^2 \equiv_{S_1},\ \langle \equiv_S, H\rangle$

b/ $\overline{\exists K}^2 \equiv_{S_1},\ \langle \equiv_S, H\rangle$

Bizonyitás:

a/

$\langle a,b\rangle \in \equiv_S \ \&\ S_1 \subset S \xrightarrow{\text{T5d}} \langle a_1,a\rangle \in \equiv_{S_1} \ \&\ \langle b_1,b\rangle \in \equiv_{S_1}$

$\Downarrow$

$\xrightarrow{\text{T5a}} \langle a_1,a\rangle \in \equiv_S \ \&\ \langle b_1,b\rangle \in \equiv_S$

$\Downarrow$

$\langle a_1,b_1\rangle \in \equiv_S$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\langle a,b\rangle\in\equiv_S \arrow[d, Rightarrow] & & \langle a_1,a\rangle\in\equiv_{S_1} \arrow[d, Rightarrow] \\
a\leftrightarrow_H b\subset S \arrow[dd, Rightarrow] & & a_1\leftrightarrow_H a\subset S_1 \arrow[d, Rightarrow, "\text{L12, L14}"'] \\
 & & (\forall b_1\in(a_1\leftrightarrow_H a)\leftrightarrow_H b)\, b_1\equiv_{S_1} b \arrow[d, Rightarrow, "\text{L12}"'] \\
(\forall b_1\in a_1\leftrightarrow_H(a\leftrightarrow_H b))\, b_1\equiv_S a_1 \arrow[dr, Rightarrow] & \overline{\text{EBA}}\ H \arrow[d, Rightarrow] & (\forall b_1\in a_1\leftrightarrow_H(a\leftrightarrow_H b))\, b_1\equiv_{S_1} b \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & (\exists b_1\in\equiv_{S_1} b)\langle a_1,b_1\rangle\in\equiv_S &
\end{tikzcd}
$$

▲

$$H/_S \stackrel{d}{=} H/_{\equiv_S}$$

Osztályozó részalgebra $(\overline{\text{ORA}})$

$$\overline{\text{ORA}}^2\langle\Sigma,a,\pi B,\sigma\rangle,\ A \xleftrightarrow{d} \overline{\text{RA}}^2\langle\Sigma,a,\pi B,\sigma\rangle,\ A\ \&\ (\exists\overline{\text{EQ}}^2 r,B)A = B/_r$$ x/

<u>Tétel 8</u>:

Legyen $\overline{\text{ORA}}^2\ R_H, A$ és $A=H/_r$. Jelöljük $|X|$-el rX-et. Ekkor

$$(\forall f\in\hat{\Omega}_H)\,|f(a_1,\ldots,a_{af})| = f(|a_1|,\ldots,|a_{af}|)$$

Bizonyitás:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
f(a_1,\ldots,a_{af})\subset|f(a_1,\ldots,a_{af})| \arrow[dr, Rightarrow] & & \overline{\text{ORA}}^2\ R_{H},A \arrow[dl, Rightarrow] & \\
 & {} \arrow[rr, Rightarrow] & & |f(a_1,\ldots,a_{af})| = f(|a_1|,\ldots,|a_{af}|) \\
f(a_1,\ldots,a_{af})\subset f(|a_1|,\ldots,|a_{af}|)\in A \arrow[urrr, Rightarrow] & & & \\
\text{T1a} \arrow[u] & \overline{\text{RA}}^2 R_{H},A \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}
$$

▲

---

x/ Itt értelemszerüen irhatunk A helyett $\langle\Sigma,a,A,\sigma\rangle$ -t is.

<u>Következmény</u>: (T8K) $\leq_H^{\varepsilon} = \Delta_H \;\&\; \overline{ORA}^2\, R_H, H/_r \Longrightarrow \bar{K}^2 r, \left\langle \Omega_H\big|_H, H \right\rangle$

Megjegyezzük, hogy $\Omega_H\big|_H$ -t azért értelmezhettük ugy, mint H-ból H-ba menő függvények halmazát, mert megegyeztünk, hogy $\{a\}$ helyett gyakran **a** -t értünk.

<u>Tétel 9</u>: $\overline{ORA}^2 R_H, A \Longrightarrow A \subset \mathscr{C}_H$.

Bizonyitás:

$$x\in A \xRightarrow[\uparrow\,(\exists r)A=H/_r]{} (\exists a)x = |a| \xRightarrow[\uparrow\,L10,T8]{} |a|\wedge_H|a| = |a|$$

V_H-ra a bizonyitás ugyanigy megy. ▲

Most kimondunk egy tételt, mely szerint kölcsönösen egyértelmü a megfeleltetés az ORA-k és SÜ-k között.

<u>Tétel 10</u>: $\overline{ORA}^2 R_H, H/_r \Longleftrightarrow \overline{SU}^2 H, rl_H \;\&\; r = \equiv_{rl_H}$

Bizonyitás:

Jelöljük ra-t $|a|$ -val és $|l_H|$-t S-sel.

I. $\overline{ORA}^2 R_H, H/_r \Longrightarrow \overline{SU}^2 H, S \;\&\; r = \equiv_S$

$$\begin{tikzcd}
\overline{ORA}^2\, R_H, H/_r \arrow[d, Rightarrow, "T9"'] & & \overline{EBA}\; H \arrow[d, Rightarrow] \\
H/_r \subset \mathscr{C}_H\setminus\{\phi\} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] & & 1_H \neq \phi \arrow[dll, Rightarrow] \\
s\in H/_r \arrow[d, Rightarrow] & & |1_H| \supset 1_H \arrow[d, Rightarrow] \\
s\in \mathscr{C}_H \arrow[rr, Rightarrow] & & \overline{SU}^2 H, S \\
(\forall a\in S, b\in H)\, |aV_Hb| \underset{\uparrow T8}{=} |1_H V_H b| \underset{\uparrow L12}{=} S \Longrightarrow SV_H H \subset S \arrow[urr, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\langle a,b\rangle \in r \arrow[d, Leftrightarrow] \\
|a| = |b| \arrow[d, Rightarrow, "T7"'] \\
|a \leftrightarrow_H b| = |a \leftrightarrow_H a| = S \arrow[d, Rightarrow] \\
a \leftrightarrow_H b \subset S \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\langle a,b\rangle \in \equiv_S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\langle a,b\rangle \in \equiv_S \arrow[d, Rightarrow] \\
a \leftrightarrow_H b \subset S \arrow[d, Rightarrow, "T6c"] \\
|a \leftrightarrow_H b| = S \arrow[d, Rightarrow, "T8"'] \\
|b| = |b \wedge_H 1_H| = |b \wedge_H (a \leftrightarrow_H b)| \overset{L12}{=} |b \wedge_H a| \overset{T8}{=} |b| \wedge_H |a| \arrow[d, Rightarrow] \\
|a| = |a| \wedge_H |b| \arrow[d, Rightarrow] \\
|a| = |b| \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\langle a,b\rangle \in r
\end{tikzcd}$$

II. $\overline{SU}^2 H,S \Longrightarrow \overline{ORA}^2 R_H,\ H/_{\equiv_S}$

$$\left(\forall f \in \Omega_H\right) |f(a_1,\dots,a_{af})| \underset{L14,L15}{=} f\left(|a_1|,\dots,|a_{af}|\right) \underset{\overline{EBA}\ H,T9}{\Longrightarrow} \overline{RA}^2 R_H, H/_S$$

▲

Megjegyezzük, hogy T10 a következőképp is fogalmazható:

$$\overline{ORA}^2 R_H,A \Longleftrightarrow \left(\exists!\ S \in A\right) \overline{SU}^2 H,S \qquad {*}/$$

$$\overline{SU}^2 H,S \Longleftrightarrow \left(\exists!\ \overline{ORA}^2 R_H, A\right) S \in A$$

$$B_S^H \overset{d}{=} H/_S \qquad \left\langle \le_{B_S^H},\ B_S^H \right\rangle \overset{d}{=} \left\langle \le_H,\ H \right\rangle\!\Big/_{\equiv_S}$$

$$\le_S \overset{d}{=} \le_{B_S^H} \qquad \Omega_S \overset{d}{=} \Omega_{B_S^H}$$

$$|x|_S \overset{d}{=} \underset{\equiv_S}{v}\ x$$

---

*/ $\exists!$ jelentése: létezik és csak egy.

Tétel 11: $\leq^{\varepsilon}_S = \Lambda_{B^H_S}$

Bizonyitás:

$$|a|_S \leq_S |b|_S \qquad\qquad |b|_S \leq_S |a|_S$$

$$\Big\Downarrow \xleftarrow{\quad} \text{L15K} \xrightarrow{\quad} \Big\Downarrow$$

$$\left(\exists b_1 \in |b|_S\right)\ a \leq_H b_1 \qquad\qquad \left(\exists b_2 \in |b|_S\right)\ b_2 \leq_H a$$

$$|a|_S \wedge_H |b|_S \in H/_S \qquad\qquad |a|_S \wedge_H |b|_S \supset \{a, b_2\}$$

$$|a|_S = |b_2|_S = |b|_S$$

▲

Tétel 12: $\varphi : \left\langle \Omega_H,\ B^H_S \right\rangle \cong \left\langle \Omega_S,\ \vec{\varphi}\, B^H_S \right\rangle$ */

Megjegyzés: mivel φ -nak és Ω_H elemeinek értékkészlete tartalmazza B^H_S -t, ezen függvények megfelelő korlátozásai értendők a fenti formulában.

Bizonyitás:

$$|a|_S \wedge_H |b|_S \supset a \wedge_H b \qquad\qquad a \wedge_H b \ni d$$

$$\Big\Downarrow$$

$$d \leq_H a \;\&\; d \leq_H b \;\&\; \left(c \leq_H a \;\&\; c \leq_H b \Longrightarrow c \leq_H a\right)$$

$$\Big\Downarrow$$

$$|d|_S \leq_S |a|_S \;\&\; |d|_S \leq_S |b|_S \;\&\; \left(|c|_S \leq_S |a| \;\&\; |c|_S \leq_S |b|_S \Longrightarrow |c|_S \leq_S |a|_S\right)$$

$$\text{T10} \longrightarrow \Big\Downarrow \qquad\qquad \Big\Downarrow$$

$$|a|_S \wedge_H |b|_S = |d|_S \qquad\qquad |d|_S \in |a|_S \wedge_S |b|_S$$

$$\text{T11} \longrightarrow \Big\Downarrow$$

$$\{|d|_S\} = |a|_S \wedge_S |b|_S$$

$$\{|a|_S \wedge_H |b|_S\} = |a|_S \wedge_S |b|_S$$

---

*/

$\varphi x \overset{d}{=} \{x\}$. Láthatóan $\vec{\varphi} A = \vec{A}$

$\{|a|_S \vee_S |b|_S\} = |a|_S \vee_H |b|_S$ bizonyitása ugyanigy megy.

$$
\begin{array}{c}
|a|_S \wedge_H \neg_H |a|_S = |0_H|_S \;\&\; |a|_S \vee_H \neg_H |a|_S = |1_H|_S \\
\Big\Downarrow \; \text{T12a,b} \\
|a|_S \wedge_S \neg_H |a|_S = |0_H|_S \;\&\; |a|_S \vee_S \neg_H |a|_S = |1_H|_S \\
\Big\Downarrow \\
\neg_H |a|_S \in \neg_S |a|_S \\
\Big\Downarrow \; \text{T11} \\
\{\neg_H |a|_S\} = \neg_S |a|_S
\end{array}
$$

▲

$R^H_S \overset{d}{=} \left\langle \Omega_H, B^H_S \right\rangle$ $\qquad$ $P^H_S \overset{d}{=} \left\langle \Omega_H \cup \{S, \neg S\}, B^H_S \right\rangle$

Megjegyzés: $\overline{SU}^2 H, 1_H$ $\quad B^H = H/1_H$. Ha $S = 1_H$, akkor az S index elhagyható, például $|a|_{1_H}$ helyett $|a|$ -t, $P^H_{1_H}$ helyett P^H -t irunk.

<u>Tétel 13</u>: $\quad S_1 \subset S \Longrightarrow R^H_{S_1} \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} R^H_S$

Bizonyitás:

Legyen $f: R^H_{S_1} \longrightarrow R^H_S$, ugy, hogy

$f\left(|a|_{S_1}\right) \overset{d}{=} |a|_S$. Ekkor f függvény /T6d/ és

ek $f = R^H_S$

$$f\left(|a|_{S_1} \wedge_H |b|_{S_1}\right) \underset{\text{T8,T9}}{=} f\left(|a \wedge_H b|_{S_1}\right) = |a \wedge_H b|_S \underset{\text{T8,T9}}{=} |a|_S \wedge_H |b|_S$$

f homomorf $\vee_H$-ra és $\neg_H$-ra is, ennek bizonyitása ugyanugy megy. Sőt

$$f(S_1) = f\left(|1_H|_{S_1}\right) \underset{\text{T6b,c}}{=} |1_H|_S \underset{\text{T6b,c}}{=} S$$

▲

$\mathcal{B}_{0,1} \overset{d}{=} \langle \{\cup, \cap, \setminus\}, \{\phi, \{\phi\}\} \rangle$

$\overline{BA}\ \langle \Omega_H, A \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} A \subset \pi H \ \&\ (\exists \underline{0}, \underline{1} \in A)\, \overline{BA}\ \langle \Omega_H \cup \{\underline{0}, \underline{1}\}, A \rangle$

<u>Tétel 14</u>: $\overline{ORA}^2 R_{H,A} \Longrightarrow \overline{BA}\ \langle \Omega_H, A \rangle$

Bizonyitás:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \overline{ORA}^2 R_{H,A} \arrow[d, Rightarrow, "T10"] & \\
 & 1_H \subset S \arrow[d, Rightarrow, "T13"'] & (\overset{d}{\exists} S)\ A = R^H_S \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & T4K \arrow[d, Rightarrow, "T12"] \\
 & R^H \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} R^H_S \arrow[dr, Rightarrow] & & \overline{BA}^2 \langle \Omega_H, B^H \rangle \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & & \overline{BA}^2 \langle \Omega_H, A \rangle &
\end{tikzcd}
$$

▲

Ultraszürő $/\overline{US}/$

$\overline{US}^3\ r,H,U \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{VSU}^3\ r,H,U \ \&\ (a \notin U \Longrightarrow \urcorner_H a \subset U)$

Megjegyzés: /M3/ $(\exists S_1, S_2)\left(R^H_{S_1} \neq R^H_{S_2} \ \&\ R^H_{S_1} \cong R^H_{S_2}\right)$

Bizonyitás:

$S_a \overset{d}{=} \{c \mid c \leq_H a\}$

$(\forall a \in H)\ \overline{SU}^2 H, S_a \ \&\ (b \in \urcorner_H a \Longrightarrow S_b \neq S_a)$

Ismert $([1],[2],[3])$, hogy $S \neq H \Longrightarrow (\exists \overline{US}^2 H, U)\ S \subset U$.

Jelöljünk U_a -val egy S_a -t tartalmazó ultraszürőt.

Legyen $a \in \urcorner_H b$

$$U_a = U_b \Longrightarrow U_a \supset \{a,b\} \Longrightarrow U_a \supset a\wedge_H b \Longrightarrow U_a \Longrightarrow U_a \supset O_H \Longrightarrow U_a = H$$

Igy $U_a \neq U_b$, és ezért $R^H_{U_a} \neq R^H_{U_b}$

$$\overline{US}^2 H, U_a \Longrightarrow \overline{SU}^2 H, U_a \;\&\; R^H_{U_a} \cong \mathcal{B}_{0,1}$$ ▲

<u>Tétel 15</u>: a/ $\overline{SU}^2 H,S \Longrightarrow \overline{SU}^2\, B^H_{S_1}, |S|_{S_1}$

b/ $\overline{SU}^2 H, \cup S \Longleftarrow \overline{SU}^2\, B^H_{S_1}, S$

Bizonyitás:

$$\overline{SU}^2 H,S$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall a,b\in S)\big(a\wedge_H b \subset S \;\&\; (\forall c\in H)\, a\vee_H c \subset S\big) \;\&\; S\neq\phi$$

$$|a\wedge_H b|_{S_1} = |a|_{S_1} \wedge_H |b|_{S_1} = |a|_{S_1}\wedge_{S_1}|b|_{S_1}$$

T8 T12

$$\big(\forall |a|_{S_1}, |b|_{S_1} \in |S|_{S_1}\big)\Big(|a|_{S_1}\wedge_{S_1}|b|_{S_1} \subset |S|_{S_1} \;\&\; \big(\forall |c|_{S_1}\in|H|_{S_1}\big)\, |a|_{S_1}\vee_{S_1}|c|_{S_1}\subset|S|_{S_1}\Big) \;\&\; |S|_{S_1}\neq\phi$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{SU}^2 B^H_{S_1}, |S|_{S_1}$$ ▲

$$H/S/S_1 \overset{d}{=} (H/S)/|S_1|_S$$

<u>Tétel 16</u>: a/ $\overline{ORA}^2 P_H, P^H \;\&\; \big(\overline{ORA}^2 P_H, A \Longrightarrow A = P^H\big)$

b/ $P^H/_S \cong P^H_S$

Bizonyitás:

a/

$$\begin{array}{ccc} \overline{ORA}^2 P_H, P^H & \& & \overline{ORA}^2 P_H, A & & A = P^H \\ \Uparrow & & \Downarrow & \nearrow & \uparrow \\ L8K & & 1_H \in A & & T10 \end{array}$$

b/ Ez a III. izomorfia tétel [1] egy speciális esete. ▲

<u>Megjegyzés</u> /M4/ : Bármely P_S^H homomorf módon beágyazható P_H-ba, mig bármely R_S^H izomorf módon ágyazható be R_H-ba, azaz

$$\left(\forall P_S^H\right)\left(\exists \overline{RA}^2 P_H, A\right) A \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} P_S^H \;\&$$

$$\left(\forall R_S^H\right)\left(\exists \overline{RA}^2 R_H, A\right) A \;\cong R_S^H$$

Bizonyitás: T16 és T10. ▲

2.4 L-gyürük

$$\Theta_H \overset{d}{=} \{\leftrightarrow_H, V_H\} \qquad \Theta_S^H \overset{d}{=} \Theta_H \cup \{S\}$$

$$J_H \overset{d}{=} \langle \Theta_H, \pi H \rangle$$

/Feltesszük, hogy $\overline{EBA}$ és $\overline{SU}^2 H, S$ /

<u>Megjegyzés</u>: /M5/ a/ $\langle \leftrightarrow_H, \pi H \rangle$ félcsoport

b/ $\langle V_H, \pi H \rangle$ félcsoport, melynek nullaeleme 1_H

c/ a fenti két félcsoportot disztributivitás köti össze.

Bizonyitás: a/ $(X \leftrightarrow_H Y) \leftrightarrow_H Z \underset{\substack{\uparrow \\ L12}}{=} X \leftrightarrow_H (Y \leftrightarrow_H Z)$

b/ $(X V_H Y)\, V_H Z = X V_H (Y V_H Z)$

$X\, V_H 1_H = 1_H$

c/ $X V_H (Y \leftrightarrow_H Z) = (X V_H Y) \leftrightarrow_H (X V_H Z)$ ▲

<u>Tétel 17</u>: a/ $0_H \in A \;\&\; \overline{RA}^2\, J_H,A \Longrightarrow \overline{RA}^2 P_H,A$

b/ $\overline{RA}^2\, J_H,A \Longrightarrow \overline{RA}^2 R_H,A$

Bizonyitás:

a/

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{RA}^2 J_H,A \arrow[dl] \arrow[dr] & & & 0_H \in A \arrow[d] & \\
\overline{Z}^2 V_H,A \arrow[ddr, Rightarrow] \arrow[dddrrr, Rightarrow] & & \overline{Z}^2 \leftrightarrow_H,A \arrow[ddr, Rightarrow] & & \overline{Z}^2 0_H,A \arrow[ddl, Rightarrow] \arrow[dddl, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
 & X \wedge_H Y = \neg_H (\neg_H X V_H \neg_H Y) \arrow[d] & & X \leftrightarrow_H 0_H = \neg_H X \arrow[d] & {}_H 0_H = 1_H & \\
 & \overline{Z}^2 \wedge_H,A \arrow[drr, Rightarrow] & & \overline{Z}^2 \neg_H,A \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \overline{Z}^2 1_H,A \arrow[dll, Rightarrow] \\
 & & & \overline{RA}^2 P_H,A & &
\end{tikzcd}$$

b/

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{SU}^2 H,S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\overline{Z}^2 \Theta_H,S \arrow[d, Rightarrow] & & \sim\overline{Z}^2 \neg_H,S \arrow[d, Rightarrow] \\
\overline{RA}^2\, J_H,S & & \sim\overline{RA}^2 R_H,S
\end{tikzcd}$$

▲

<u>Tétel 18</u>: $\overline{ORA}^2\, J_H,A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2 R_H,A$

Bizonyitás: I.

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{RA}^2 R_H,A \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
 & \overline{Z}^2\, \Omega_H,A \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
L9 \arrow[r] & \overline{Z}^2\, \hat{\Omega}_H,A \arrow[d, Rightarrow] & \Theta_H \subset \hat{\Omega}_H \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \overline{Z}^2 \Theta_H,A \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \overline{RA}^2 J_H,A &
\end{tikzcd}$$

II. Legyen $\overline{ORA}^2 J_H, A$. Jelöljük $|X|$-el A azon elemét, amely tartalmazza X -t, ha van ilyen.

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{ORA}^2 J_H, A \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[rr] & & \bar{Z}^2 \leftrightarrow_H, A \arrow[dd, Rightarrow] & |a|\leftrightarrow_H|0_H| = |a\leftrightarrow_H 0_H| = |\neg_H a| = \neg_H|a| \arrow[ddl, Rightarrow] \\
(\exists r)A=H/r \arrow[ddrrr] & & \bar{Z}^2 V_H, A \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & \\
 & & & \bar{Z}^2 \wedge_H, A \arrow[d, Rightarrow] & \bar{Z}^2 \neg_H, A \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dl] & \\
 & & & \overline{ORA}^2 R_H, A & &
\end{tikzcd}$$

▲

$$\mathcal{J}\left(R_S^H\right) \stackrel{d}{=} \mathcal{J}\left(L_S^H\right) \stackrel{d}{=} J_S^H \stackrel{d}{=} \left\langle \left\{ \leftrightarrow_H, V_H \right\}, B_S^H \right\rangle$$

$$\mathcal{L}\left(R_S^H\right) \stackrel{d}{=} \mathcal{L}\left(J_S^H\right) \stackrel{d}{=} L_S^H \stackrel{d}{=} \left\langle \left\{ \leftrightarrow_H, V_H, S \right\}, B_S^H \right\rangle$$

$$\mathcal{G}\left(L_S^H\right) \stackrel{d}{=} G_S^H \stackrel{d}{=} \left\langle \left\{ \leftrightarrow_H, \Delta_{B_S^H}, S \right\}, B_S^H \right\rangle$$

$$\mathcal{D}\left(L_S^H\right) \stackrel{d}{=} D_S^H \stackrel{d}{=} \left\langle \left\{ V_H, S \right\}, B_S^H \right\rangle$$

<u>Megjegyzés</u>: /M6/: a/ L_S^H gyürü

b/ G_S^H 2-karakterisztikáju Ábel-csoport */

c/ D_S^H nullaelemes félcsoport, melyben van egységelem is.

Bizonyitás: A fenti algebraosztályokat definiáló egyenletek teljesülnek T14 miatt.

▲

*/ Egy $\langle\{\cdot,^{-},1\},A\rangle$ csoport 2-karakterisztikáju, ha $(\forall a\in A)a\cdot a = 1$

Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{L}$ függvény értelmezve van bármely Boole-algebrára, vagy bármely kétmüveletes 2-karakterisztikáju algebrára, mert ha

$$R = \langle \{\wedge, \vee, \neg\},\ B \rangle$$

$$\mathcal{J}(R) = J = \langle \{\leftrightarrow, \vee\},\ B \rangle \quad \text{és}$$

$a \in B$ tetszőleges, akkor

$$\mathcal{L}(R) \stackrel{d}{=} \langle \{\leftrightarrow, \vee, a \vee \neg a\},\ B \rangle$$

$$\mathcal{L}(J) \stackrel{d}{=} \langle \{\leftrightarrow, \vee, a \leftrightarrow a\},\ B \rangle$$

A korábbiakhoz hasonlóan, ha $S = 1_H$, akkor elhagyjuk az S indexet, például $G^H = G^H_{1_H}$

$$\overline{BA}\ R \Longrightarrow J^R = \mathcal{J}(R) \quad \text{következik a definiciókból.}$$

MG - gyürü / $\overline{MG}$/

$$\overline{MG}\ L \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} (\exists\, \overline{BA} R) L = \mathcal{L}(R)$$

<u>Lemma 16</u>: $\quad \overline{MG}\ L \Longleftrightarrow (\exists\, \overline{BA}\ R) L = \mathcal{L}(R)$

Bizonyitás:

Legyen $\quad R_i = \langle \{\vee_i, \wedge_i, \neg_i, 0_i, 1_i\}, B \rangle \quad i=1,2,$

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \{\leftrightarrow, \vee\},\ B \rangle = \mathcal{L}(R_1) = \mathcal{L}(R_2) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\leftrightarrow_1 = \leftrightarrow_2 \arrow[dd, Rightarrow] & & \vee_1 = \vee_2 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] \\
 & 0_1 = 0_2 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
\neg_1 X = X \leftrightarrow_1 0_1 = X \leftrightarrow_2 0_2 = \neg_2 X \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\neg_1 = \neg_2 \arrow[rr, Rightarrow] & & R_1 = R_2
\end{tikzcd}$$

▲

T18-ból és a definicióból következik, hogy J_H minden ORA-ja MG-gyürü. /Pontosabban minden L^H_S MG-gyürü./

$\mathcal{B}(L) = B \xleftrightarrow{d} L = \mathcal{L}(B)$, azaz $\mathcal{B} = \mathcal{L}^{-1}$

Látható, hogy $et(\mathcal{B}) = \{L \mid \overline{MG}\ L\}$

L-gyürü $/\bar{L}/$

$\bar{L}\ \langle\{\leftrightarrow, V, 1\}, A\rangle \xleftrightarrow{d}$ az $\langle\{\leftrightarrow, \Delta_A, 1\}, A\rangle$ algebra Ábel-csoport és

$\langle\{V, 1\}, A\rangle$ nullaelemes /=1/ idempotens félcsoport.

<u>Tétel 19</u>: $\bar{L}L\ \&\ \mathcal{D}(L)$ monoid $\Longleftrightarrow \overline{MG}\ L$

A bizonyitást lásd például [1.V.2. fejezetben]

▲

<u>Tétel 20</u>: a/ $(\exists \overline{RA}^2 L_1, L_2)\ \overline{MG}\ L_1\ \&\ \sim\overline{MG}\ L_2$

b/ $\overline{MG}\ L_1\ \&\ L_1 \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\!\rightarrow L_2 \Longrightarrow \overline{MG}\ L_2$

c/ $\bar{L}L_1\ \&\ \overline{RA}^2 L_1, L_2 \Longrightarrow \bar{L}L_2$

d/ $\bar{L}L_1\ \&\ L_1 \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\!\rightarrow L_2 \Longrightarrow \bar{L}L_2$

Bizonyitás: A részalgebra viszony nem tartja meg a monoidságát, mint tulajdonságot, a homomorf kép viszont igen. Az Ábel-csoportok és nullaelemes félcsoportok zártak részalgebra- és homomorf kép-képzésre.

▲

<u>Tétel 21</u>: $\overline{BA}\ R\ \&\ \overline{SU}^2 R, S \Longrightarrow \overline{RA}^2 \mathcal{L}(R), S$

Bizonyitás:

$$a, b \in S \nearrow a \vee b \in S$$
$$a, b \in S \searrow a \leftrightarrow b \in S$$

$1 \in S$

▲

<u>Tétel 22</u>: a/ $\overline{RA}^2\ J_H,\ |S|_{S_1}$

b/ $S_1 = S_2 \Longleftrightarrow |S_1| = |S_2|$

c/ $S_3 = \bigcap \left\{S \mid \overline{SU}^2 H, S \ \& \ S \supset S_1 \cup S_2\right\} \Longrightarrow \mho : H/_{S_3} = H/_{S_1}/_{S_2}$

másszóval: $\tilde{\mho}\left(H/_{S_1}/_{S_2}\right) = H/_{S_3}$

Bizonyitás:

a/

$$\begin{tikzcd}
\overline{BA}\ R^H_{S_1} \arrow[dr] & \overline{SU}^2\ R^H_{S_1},\ |S|_{S_1} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[l, phantom, "T21"] & \overline{RA}^2\ J_H,\ \mathcal{L}\left(R^H_{S_1}\right) \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \overline{RA}^2 \mathcal{L}\left(R^H_{S_1}\right), |S|_{S_1} \arrow[r, Rightarrow] & \overline{RA}^2\ J_H, |S|_{S_1}
\end{tikzcd}$$

b/ M2b

c/

$$\begin{tikzcd}
S_3 \supset S_1 \cup S_2 \arrow[d, Rightarrow] & & a \in \mho |S_1|_{S_2} \arrow[d, Rightarrow] \\
\equiv_{S_3} \supset \equiv_{S_1} \cup \equiv_{S_2} \arrow[dr, Rightarrow] & & (\exists a_1 \in S_1) a_1 \equiv_{S_2} a \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & a \in S_3 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S_3 \supset \mho |S_1|_{S_2} \arrow[r, Rightarrow] & S = \mho |S_1|_{S_2} \\
 & T15b \arrow[ul, shorten <=1em]
\end{tikzcd}$$

▲

Mivel $1_H \subset S$, a fenti tétel értelmében, ha a B^H Boole-algebra szürőit és a $J^{B^H}_{|S|}$ gyürüket vizsgáljuk, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint ha a H elő-Boole-algebra szürőit és a J^H_S gyürüket vizsgálnánk. Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha az L^H gyürünek az L^H_S homomorf képeit vizsgáljuk. Az ebből származó egyszerüsödés miatt a továbbiakban ezt az utat választjuk.

Kongruens részalgebra /$\overline{KRA}$/

Legyen $\mathfrak{A} = \langle \Xi, A\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \Xi, B\rangle$

$$\overline{KRA}^2\ \mathfrak{A}, T \xLeftrightarrow{d} (\exists \bar{K}^2 r, A)\ T \in A/r \ \& \ \overline{RA}^2\ \mathfrak{A}, T$$

$\overline{KRA}^2\,\mathfrak{A},\mathfrak{B} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{KRA}^2\,\mathfrak{A},B$

Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{A}$ algebra T KRA-it $\langle \Xi, T\rangle$ algebrának is tekinthetjük.

<u>Következmények:</u> /T22K/

a/ $\overline{ORA}^2\ J_{B^H},A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2\ J_H, \tilde{\vec{U}}A$

Az egyszerüség kedvéért a továbbiakban $\tilde{\vec{U}}$ A helyett gyakran A-t fogunk irni.

igy: $\overline{ORA}^2\ J_{B^H},A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2\ J_H,A$

b/ $\bar{K}^2 r, R^H \Longleftrightarrow \bar{K}^2 r,\ J^H$

c/ $\overline{BA}\ R \Longrightarrow \left[\bar{K}^2 r, R \Longleftrightarrow \bar{K}^2 r, \mathcal{L}(R)\right]$

d/ $\bar{K}^2 \equiv_{|S|},\ J^H$

e/ $\overline{SU}^2 B^H, A \Longleftrightarrow \overline{KRA}^2\ J^H, A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2\ J_H,\ J^H_{UA}$

másszóval J^H_S -k a J^H faktoralgebrái az S KRA-k szerint,

azaz $J^H_S = J^H/_S$ uj értelmezést nyert.

Bizonyitás:

a/ T22

b/ $\bar{K}^2 r, R^H \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2 R_H, B^H/r \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2\ J_H, B^H/r \Longleftrightarrow \bar{K}^2 r,\ J^H$

c/ T22Ka

d/ $\overline{ORA}^2\ J_H, B^H_S \ \&\ B^H_S = B^H/_{\equiv_{|S|}}$

e/ $\overline{KRA}^2\ J^H, A$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overline{KRA}^2\ J^H,A \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
1_H \in A \arrow[dr, Rightarrow] & & (\exists S)\ A \in B^H/_{|S|} \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
 & \overline{SU}^2 B^H, A \arrow[r, Rightarrow] & \overline{ORA}^2 R_H, B^H/_A \arrow[r, Rightarrow, "\uparrow T18"'] & \overline{ORA}^2\ J_H,\ J^H_{UA} \arrow[r, Rightarrow] & \overline{SU}^2 H,\ UA \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & & \overline{SU}^2 B^H, A \arrow[d, Rightarrow, "T18"'] \\
 & & & & \overline{KRA}^2\ J^H, A
\end{tikzcd}$$

▲

<u>Tétel 23</u>: a/ $\bar{L}L \Longrightarrow (\forall \overline{KRA}^2 L,S)(\exists \bar{K}^2 r,L)\ S\in L/r$

b/ $\bar{L}L \Longrightarrow (\forall \bar{K}^2 r,L)(\exists \overline{KRA}^2 L,S)\ S\in L/r$

Bizonyitás:

a/ $\bar{L}L\ \&\ \overline{KRA}^2 L,S$

$\Downarrow$

S normálosztója G(L)-nek

$\Downarrow$

$(\exists \bar{K}^2 r,L)\ S\in L/r$

b/ $\bar{L}L\ \&\ \bar{K}^2 r,L$

$(\exists S)$ S normálosztója G(L)-nek és $S\in L/r$

$(\exists \overline{KRA}^2 L,S)\ S\in L/r$

▲

T23 azt jelenti, hogy L algebrákon KRA és K egyazon tulajdonság két aspektusa.

Szürőlánc $(\overline{SL})$

$$\overline{SL}^2 H, \langle S_1,\dots,S_n\rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} S_1 \supset \dots \supset S_n$$

Szürőlánc finomitása $(\overline{FI})$

$$\overline{FI}^2 \langle S_1^1,\dots,S_n^1\rangle, \langle S_1^2,\dots S_m^2\rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} \left(\exists \text{kölcsönösen egyértelmü monoton } h:[1,n]\to[1,m]\right)^{x}$$

$$(\forall i\in[1,n])\ S_i^1 = S_{h(i)}^2\ \&\ S_n^1 = S_m^2\ \&$$

$$\&\ \overline{SL}^2 H, \langle S_1^1,\dots,S_n^1\rangle\ \&\ \overline{SU}^2 H, \langle S_1^2,\dots,S_m^2\rangle$$

---

x/ h monoton $\overset{d}{\Longleftrightarrow} \left(i\le j \Longrightarrow h(i)\le h(j)\right)$

Szürőláncok izomorfiája

Legyen $\overline{SL}^2 H, \langle S_1^1, \dots, S_n^1 \rangle$ és $\overline{SL}^2 H, \langle S_1^2, \dots, S_n^2 \rangle$. Ekkor

$$\langle S_1^1, \dots, S_n^1 \rangle \cong \langle S_1^2, \dots, S_n^2 \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\exists h: [1,n] \twoheadrightarrow [1,n])(\forall i \in [1,n])\ S_i^1 / S_{i+1}^1 \cong S_{h(i)}^2 / S_{h(i)+1}^2$$

Az izomorfia értelmezésénél az S_i^j -ket $\left(i \in [1,2],\ j \in [1,2]\right)$ a J^H részalgebráinak tekintjük.

Tétel 24: /Finomitási tétel/

$S_n^1 = S_m^2 \Longrightarrow$ /van közös izomorf finomitása $\langle S_1^1, \dots, S_n^1 \rangle$ -nek és $\langle S_1^2, \dots, S_m^2 \rangle$-nek /

Bizonyitás:

lásd [1]-ben II.6.8. és II.6.11. tételeket.

▲

Következmény: /T24K/

$\overline{BA}\ B \ \&\ B \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C \Longrightarrow$ /a $B \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B_1^1 \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \dots \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C$ és a $B \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B_1^2 \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \dots \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C$ láncoknak van közös finomitása/.

Bizonyitás:

$$B \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B_1 \Longrightarrow (\exists \overline{SU}^2 B, S)\, B_1 \cong B/S$$

▲

$a \preccurlyeq_S b \overset{d}{\Longleftrightarrow} a \rightarrow_H b \subset S$, ahol $\rightarrow \in \hat{\Omega}$, ugy, hogy

$$a \rightarrow_H b \overset{d}{=} b \vee_H \neg_H a$$

Lemma 17: $\overline{ER}^2 \preccurlyeq_S, H$

Bizonyitás: 1/ $a \preccurlyeq_S a$ $(\Longleftarrow 1_H \subset S)$

2/ $a \preccurlyeq_S b \ \&\ b \preccurlyeq_S c \Longrightarrow a \preccurlyeq_S c$ $\quad \left(\Longleftarrow (a \rightarrow_H b) \wedge_H (b \rightarrow_H c) \le a \rightarrow_H c\right)$

▲

<u>Lemma 18</u>: $\overline{\forall K}^2 \; \leq^{\varepsilon}_{H}, \; \langle \leq_H, H \rangle$

Bizonyitás:

$$\begin{tikzcd}
a \leq_H b \arrow[dr, Rightarrow] & a_1 e \leq^{\varepsilon}_{H} a \arrow[d, Rightarrow] & b_1 e \leq^{\varepsilon}_{H} b \arrow[dl, Rightarrow] \\
& a_1 \leq_H b_1 &
\end{tikzcd}$$

▲

<u>Lemma 19</u>: $\preccurlyeq^{\varepsilon}_{S} = \equiv_S$

Bizonyitás:

$$a \leftrightarrow_H b \in S \Longleftrightarrow (a \to_H b) \wedge_H (b \to_H a) \in S \Longleftrightarrow (a \to_H b \in S \;\&\; b \to_H a \in S)$$

▲

$T_S \overset{d}{=} \langle \preccurlyeq_S, H \rangle$

<u>Tétel 25</u>: $R^{T_S} = R^H_S \quad \left(\text{pontosabban: } \widetilde{\mho}\left(R^H_S\right) = R^{T_S}\right)$

Bizonyitás:

$$\equiv_S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L19}}}{=} \equiv_{1_{T_S}}$$

▲

<u>Következmény</u>: /T25K/ a/ $\{S \mid \overline{SU}^2 H, S\} \supset \{\overline{SU}^2 T_{S_1}, S\}$

b/ $\overline{ORA}^2 T_S, B \Longrightarrow \overline{ORA}^2 H, B$

Bizonyitás:

a/ T15

b/ T25Ka

▲

<u>Megjegyzés</u>: /M7/ H valamely szürője kiválasztja H ORA-inak, szürőinek, zárt halmazainak, stb. egy-egy részhalmazát.

<u>Tétel 26</u>: Legyen $H \supset H_1$. Ekkor

$$\overline{RA}^2 R_H,\ R_{H_1} \Longleftrightarrow \overline{RA}^2 R^H,\ R^{H_1}$$

Bizonyitás:

I. $\overline{RA}^2 R_H,\ R_{H_1}$ & $H \supset H_1$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{RA}^2 R_H,\ R_{H_1} \,\&\, H \supset H_1 \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
x \in R^{H_1} \arrow[d, Rightarrow] & & x \in R^{H} \\
(\exists a \in H_1)\, a \wedge_{H_1} a = x \arrow[rr, Rightarrow] & & (\exists a \in H)\, a \wedge_H a = x \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

$$x, y \in R^{H_1} \Longrightarrow x \wedge_{H_1} y = x \wedge_H y \in R^{H_1}$$

V-ra és $\neg$-re ugyanigy megy a bizonyitás.

II. $\overline{RA}^2 R^H,\ R^{H_1}$

$$\downarrow$$

$$X \wedge_{H_1} Y = \bigcup \{ x \wedge_{H_1} y \mid x \in X \cap B^{H_1},\ y \in Y \cap B^{H_1} \} =$$

$$= \bigcup \{ x \wedge_H y \mid x \in X \cap B^{H},\ y \in Y \cap B^{H} \} = X \wedge_H Y$$

V-ra és $\neg$-re ugyanigy megy a bizonyitás.

▲

3. PREDIKÁTUMKALKULUS ÉS MODELLTÉR

3.1 Definiciók

A változó-jelek halmaza: $Z \overset{d}{\equiv} \{x_i \mid i \in \omega\}$

Az n-változós relációjelek halmaza: R_n

Az n-argumentumu müveletjelek halmaza: K_n

Az R_n és K_n halmazok tetszőleges, de rögzitett jelhalmazok.

Kikötés: $\doteq \in R_2$, azaz az egyenlőségjel mindig szerepel a kétváltozós relációjelek között.

$$R \overset{d}{\equiv} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \qquad K \overset{d}{\equiv} \bigcup_{i=o}^{\infty} K_i$$

A kifejezések: $T \overset{d}{\equiv} T(K) \overset{d}{\equiv} W_K(Z)$

A primformulák: $P \overset{d}{\equiv} P(R,K) \overset{d}{\equiv} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \times {}^i T$

A mondattani jelek: $L \overset{d}{\equiv} \{\wedge, \neg, c_i, d_{ij} \mid i,j \in \omega\}$

A formulák: $F \overset{d}{\equiv} F(R,K) \overset{d}{\equiv} W_L(P)$

A $\{Z, L, R_i, K_i, K_o \mid i \in \omega\}$ halmaz elemeinek diszjunktaknak kell lenniük. A definiált halmazok elemeire a továbbiakban az alábbi jelöléssel fogunk hivatkozni:

$$\rho_i \in R_i \ ; \quad \kappa_i \in K_i \ ; \quad \tau \in T \ ; \quad \chi, \varphi, \psi \in F \ ; \qquad \Sigma \subset F$$

A levezetett mondattani jelek: $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \text{Ɔ}_i, 1, 0\}$, az alábbi definiciókkal:

$$\varphi \vee \psi \overset{d}{\equiv} (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \overset{d}{\equiv} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \overset{d}{\equiv} \neg\varphi \vee \psi \qquad \text{Ɔ}_i \varphi \overset{d}{\equiv} \neg c_i \neg \varphi$$

$$1 \overset{d}{\equiv} d_{11} \qquad 0 \overset{d}{\equiv} \neg 1$$

Azért, hogy az általunk használt nyelvet megkülönböztessük a vizsgálat tárgyát képező nyelvtől $(W_L(P))$, használjuk a következő mondattani jeleket:
$\&, \mathbb{V}, \sim, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \exists x_i, \forall x_i$. Ezek rendre megfelelnek a tárgynyelv
$\wedge, \vee, \neg, \longrightarrow, \longleftrightarrow, c_i \ \text{Ɔ}_i$ mondattani jeleinek.

Egy formula szabadváltozóinak halmazát előállító v függvény:

$$v : F \longrightarrow \pi V$$

$$v \overset{d}{=} \mathrm{ext}\left(W_L(P), \langle L, a, \pi Z, \sigma\rangle\right)k, \text{ ahol}$$

σ:

$$\sigma(\neg) \overset{d}{=} \Delta_{\pi V}, \quad \sigma(\wedge) \overset{d}{=} \cup, \quad \sigma(c_i) \overset{d}{=} \setminus x_i \text{ x/} \quad \sigma(d_{ij}) \overset{d}{=} \{x_i, x_j\},$$

és

$$k : P \longrightarrow \pi Z$$

$$k\left(\rho_n \tau_1 \ldots \tau_n\right) \overset{d}{=} r\tau_1 \cup \ldots \cup r\tau_n, \text{ ahol}$$

$$r : T \longrightarrow \pi Z$$

$$r \overset{d}{=} \mathrm{ext}\left(W_K(Z), \langle K, a, \pi Z, p\rangle\right)\Delta_Z, \text{ ahol}$$

p:

$$p\kappa_n\left(A_1, \ldots, A_n\right) \overset{d}{=} A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

Az állitások: $A \overset{d}{=} A(R,K) \overset{d}{=} \{\varphi \mid v\varphi = \phi\}$

A nyelv interpretációja

Interpretáció: $I \overset{d}{=} \langle R, K, a, M_I, \sigma_I\rangle$ algebrai rendszer.

Kikötés: $\sigma_I(\doteq) = \Delta_{M_I}$

Egy $I = \langle R, K, a, M_I, \sigma_I\rangle$ algebrai rendszert az $F(R,K)$ szintaxis egy interpretációjának nevezzük, ha teljesiti a fenti kikötést.

Kiértékelés:

Legyen $s : Z \longrightarrow M_I$. Ekkor

$$k(I,s) : \langle \Gamma, a, F, \sigma_W\rangle \xrightarrow{\sim\!\!\!\to} \mathcal{L}_{01}$$

---

x/

$\setminus x_i : \pi Z \longrightarrow \pi Z$, ugy, hogy $\setminus x_i(A) \overset{d}{=} A \setminus \{x_i\}$

A k(I,s) függvényt, melynek segitségével az interpretáció igazságértéket rendel a szintaxis elemeihez, kiértékelésnek nevezzük. Ahhoz, hogy a k(I,s) függvény a nyitott formulákhoz is igazságértéket tudjon rendelni, szükséges valamilyen $s:Z \longrightarrow M_I$ függvényt is megadni. /Ez a változójeleket értékeli ki./

$$\downarrow \overset{d}{=} \phi, \quad \uparrow \overset{d}{=} \{\phi\}, \quad B_o \overset{d}{=} \{\downarrow,\uparrow\}, \quad \leq_{B_o} \overset{d}{=} (B_o \times B_o) \setminus \{<\uparrow,\downarrow>\}$$

Legyen

$$g(I,s):T \longrightarrow M_I$$

$$g(I,s) \overset{d}{=} \mathrm{ext}\left(W_K(Z), <K,a,M_I,\sigma_I>\right)s$$

most

$$k(I,s)\left(\rho_n\tau_1,\dots,\tau_n\right) = \uparrow \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overset{n}{\square}\, g(I,s)(\tau_1,\dots,\tau_n) \in \sigma_I\rho_n$$

$$k(I,s)\ d_{ij} = \uparrow \overset{d}{\Longleftrightarrow} sx_i = sx_j$$

$$k(I,s)\ c_i\varphi \overset{d}{=} \sup_{\leq_{B_o}} \{k(I,s(a/x_i))\varphi \mid a \in M_I\} \quad ^{*/}$$

$$k(I,s)\ \neg\varphi \overset{d}{=} \neg_{B_o}\ k(I,s)\varphi$$

$$k(I,s)\ \varphi\wedge\psi \overset{d}{=} k(I,s)\varphi \wedge_{B_o} k(I,s)\psi$$

Modelltér: $M \overset{d}{=} M(R,K) \overset{d}{=} \{<R,K,a,A,\sigma> \mid \sigma(\doteq) = \Delta_A\}$

A továbbiakban a következő jelöléseket fogjuk használni:

$$N \subset M \quad ; \quad I \in M$$

Legyen $\models \subset M \times F$, ugy, hogy

$$<I,\varphi> \in \models \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall s)k(I,s)\varphi = \uparrow$$

$N \models \Sigma \overset{d}{\Longleftrightarrow} N \times \Sigma \subset \models$, a relációjelek szokásos infix irásmódjának általánositásával. **/

Ha $N \models \Sigma$, akkor azt mondjuk, hogy N-ben érvényes a Σ.

---

*/

$$s(a/x_i) \overset{d}{=} s\Big|_{Z\setminus\{x_i\}} \cup \{<x_i,a>\}$$

**/ A +ab kifejezés infix alakja (a+b).

Mint ismeretes /lásd például [1]/, $\models$ Galois-kapcsolatot definiál πM és $\pi\Sigma$ között, a következő módon:

$$N^* \stackrel{d}{=} \bigcap \overset{v}{\models} N$$

$$\Sigma^* = \bigcap \overset{v}{\models}^{-1} \Sigma$$

A $\models$ jel infix alakjának kiterjesztése:

$$\Sigma \models \Sigma_1 \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \Sigma^{**} \supset \Sigma_1^{**}$$

Ha $\Sigma \models \Sigma_1$, akkor azt mondjuk, hogy Σ-nak szemantikai következménye Σ_1.

$$\mathcal{C}_N \stackrel{d}{=} \{N \mid N^{**} = N\}$$

$$\mathcal{C}_\Sigma \stackrel{d}{=} \{\Sigma \mid \Sigma^{**} = \Sigma\}$$

$\mathcal{C}_N$ a zárt modellosztályok, $\mathcal{C}_\Sigma$ a zárt formulahalmazok /másszóval elméletek/ osztálya.

Megjegyezzük, hogy a kompaktsági tétel /lásd T37/ kimondja, hogy $\overline{AZR}\ \mathcal{C}_\Sigma$.

<u>Nevezetes interpretációk:</u>

$I_T \stackrel{d}{=} \langle R,K,a,T,\sigma_T \rangle$, ahol

$\sigma_T \stackrel{d}{=} \sigma_W \cup \sigma_R$, és

$(\forall r \in R \setminus \{\pm\}) \sigma_R(r) \stackrel{d}{=} \phi$, $\sigma_R(\pm) \stackrel{d}{=} \Delta_T$

Teljesen invariáns kongruencia $/\overline{TI}/$

$$\overline{TI}^2 r, \mathfrak{A} \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \bar{K}^2 r, \mathfrak{A}\ \&\ (\forall h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}) \overset{2}{\square} h(r) \subset r$$

$$\approx_\Sigma \stackrel{d}{=} \{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \mid \tau_1 \pm \tau_2 \in \Sigma^{**}\}$$

Legyen $E \subset \{\pm\} \times {}^2T$

Tétel 27: a/ $\overline{\exists K}^2 \approx_{\Sigma,} I_T$

b/ $I_T/\approx_E \in E^*$

c/ $\approx_E = \bigcap\{r \mid (\tau_1 \doteq \tau_2 \in E \Longrightarrow \langle\tau_1,\tau_2\rangle \in r) \& \overline{TI}^2 r, T\}$

d/ $\approx_E = \bigcap\{r \mid T/r \in E^*\}$

Bizonyitás:

a/ $\bar{K}^2 \approx_{\Sigma,} I_T$ bizonyitása megtalálható [1.IV.1.2]-ben

$$r \in R\setminus\{\doteq\} \Longrightarrow \sim(\exists\tau_1,\tau_2)\ \langle\tau_1,\tau_2\rangle \in \sigma(r)$$

$$\tau_1 \doteq \tau_2 \Longrightarrow \left(\forall \tau_1^1 \approx_\Sigma \tau_1\right)\ \tau_1^1 \approx_\Sigma \tau_2\ \&\ \tau_1^1 \doteq \tau_1^1$$

b/ és c/ bizonyitása megtalálható [1.IV.1.2]-ben.

d/ bizonyitása megtalálható [4]-ben. ▲

Megjegyzés: /M8/ a/ $R = \{\doteq\} \Longrightarrow \left(I_T/\approx_E\right)^* = E^{**}$

b/ $R = \{\doteq\} \Longrightarrow (I_T)^{**} = M$

c/ $R = \{\doteq\} \Longrightarrow I_T/\approx_E$ szabadalgebra E^* -ban.

Bizonyitás:

a/ bizonyitása megtalálható [1.IV.1.2]-ben.

b/ az a/ állitás speciális esete: $E = \phi$

c/ következik a szabadalgebra definiciójából, mely megtalálható például [1], [2], [3], [4]-ben.

▲

3.2 A formulák elő-Boole-algebrái

$$\varphi \leq_N \psi \overset{d}{\Longleftrightarrow} N \models \varphi \to \psi$$

$$\leq_N^\varepsilon \overset{d}{=} \equiv_N$$

$$F_N \overset{d}{=} \langle \leq_N, F \rangle$$

Ha N = M, akkor az N indexet elhagyjuk, például: $F = \langle \leq, F \rangle$

A következőkben bebizonyitjuk, hogy $\overline{EBA}\ F_N$ és $\mathcal{C}_\Sigma \subsetneqq \{S \mid \overline{SU}^2 F, S\}$.

Az R_S^F Boole-algebra segitségével kezelhetők az S elmélet rögzitése után fennmaradó szabadságfokok. /Szabadságfokok alatt például ujabb axiómák felvételének lehetőségét értjük./ Az R_S^F-ek láncaira érvényes /T24K szerint/ a finomitási tétel. Az elméletek R^F olyan felbontását adják, melynél finomabbat kapunk, ha F többi szürőjét is megengedjük. Látni fogjuk, hogy $\mathcal{C}_\Sigma$ elemei F-nek pontosan azok a szürői, melyek A valamely részhalmazával generálhatók. Ez indokolja az A halmaz közelebbi vizsgálatát.

A továbbiakban a $(\forall I \in N)\ k(I,s)$ jelsorozat helyett k_N-et, a $k(I,s)$ jelsorozat helyett pedig k-t irunk.

<u>Lemma 20</u>: a/ $\varphi \leq_N \psi \Longleftrightarrow k_N \varphi \leq_{B_o} k\psi$

b/ $\varphi \equiv_N \psi \Longleftrightarrow k_N \varphi = k\psi$

Bizonyitás:

a/ $\varphi \leq_N \psi \Longleftrightarrow k_N(\varphi \to \psi) = \uparrow \Longleftrightarrow (\forall I \in N)(k\varphi = \uparrow \vee k\psi = \downarrow) \Longleftrightarrow (\forall I \in N)(k\varphi \leq_{B_o} k\psi)$

b/ $\varphi \equiv_N \psi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L20a}}}{\Longleftrightarrow} k_N \varphi \leq_{B_o} k\psi \ \&\ k_N \psi \leq_{B_o} k\varphi \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (\forall I \in N)(k\varphi \leq_{B_o} k\psi \ \&\ k\psi \leq_{B_o} k\varphi) \Longleftrightarrow (\forall I \in N)(k\varphi = k\psi)$ ▲

<u>Tétel 28</u>: $\overline{ER}^2 \leq_N, F$

Bizonyitás:

$\varphi \leq_N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L20}}}{\Longleftarrow} k_N \varphi \leq_{B_o} k\varphi$

$$\begin{tikzcd}
\varphi \leq_N \psi \ \&\ \psi \leq_N \chi \arrow[d, Rightarrow, "\text{L20a}"] & \varphi \leq_N \chi \\
k_N \varphi \leq_{B_o} k\psi \ \&\ k_N \psi \leq_{B_o} k\chi \arrow[r, Rightarrow] & k_N \varphi \leq_{B_o} k\chi \arrow[u, Rightarrow, "\text{L20a}"']
\end{tikzcd}$$

▲

Mivel ugyanazon az F halmazon minden N-hez tartozik egy $\leq_N$ előrendezés, a $\leq_F = \leq_N$ előrendezéssel generált Γ_F elemeit Γ_N-nel jelöljük. Például,

$$O_N \stackrel{d}{=} O_F \text{ , ha } \leq_F = \leq_N \text{ .}$$

Lemma 21: a/ $\varphi \in O_N \Longleftrightarrow k_N\varphi = \downarrow$

b/ $\varphi \in I_N \Longleftrightarrow k_N\varphi = \uparrow$

Bizonyitás:

a/ $\varphi \in O_N \Longleftrightarrow (\forall\psi)\ \varphi \leq_N \psi \Longleftrightarrow (\forall\psi)\, k_N\varphi \leq_{B_o} k\psi \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall\psi)(\forall I \in N)(k\varphi \leq_{B_o} k\psi \ \&\ k\varphi \leq_{B_o} k\neg\psi) \Longleftrightarrow k_N\varphi = \downarrow$$

A b/ állitás bizonyitása hasonlóan megy. ▲

Tétel 29: a/ $\chi \in \varphi \wedge_N \psi \Longleftrightarrow \chi \equiv_N \varphi \wedge \psi$

b/ $\chi \in \varphi \vee_N \psi \Longleftrightarrow \chi \equiv_N \varphi \vee \psi$

c/ $\chi \in \neg_N \varphi \Longleftrightarrow \chi \equiv_N \neg\varphi$

Bizonyitás:

a/ $\chi \in \varphi \wedge_N \psi$

$$\Updownarrow$$

$$\chi \leq_N \varphi \ \&\ \chi \leq_N \psi \ \&\ ((\Theta \leq_N \varphi \ \&\ \Theta \leq_N \psi) \Longrightarrow \Theta \leq_N \chi)$$

$$\Updownarrow \longleftarrow \text{L20a}$$

$$(k_N\chi \leq_{B_o} k\varphi \ \&\ k_N\chi \leq_{B_o} k\psi) \ \&\ ((k_N\Theta \leq_{B_o} k\varphi \ \&\ k_N\Theta \leq_{B_o} k\psi) \Longrightarrow \Theta \leq_N \chi)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall I \in N)\, k\chi \leq_{B_o} k(\varphi \wedge \psi) \quad \&\quad ((k_N\Theta \leq_{B_o} k(\varphi \wedge \psi)) \Longrightarrow \Theta \leq_N \chi)$$

$$\Updownarrow \longleftarrow \text{L20a}$$

$$\chi \leq_N \varphi \wedge \psi \ \&\ (\Theta \leq_N \varphi \wedge \psi \Longrightarrow \Theta \leq_N \chi)$$

$$\Updownarrow$$

$$\chi \equiv_N \varphi \wedge \psi$$

a b/ bizonyitása ugyanigy megy.

c/

$$
\begin{tikzcd}
 & \chi \in \rceil_N \varphi \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
\chi \wedge_N \varphi \subset 0_N \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[rr, phantom, ""] & & \chi \vee_N \varphi \subset \Lambda_N \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\chi \wedge \varphi \in 0_N \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[u, phantom, ""] & \text{T29a,b} & \chi \vee \varphi \in 1_N \arrow[d, Leftrightarrow] \\
k_N \chi \wedge \varphi = \downarrow \arrow[dr, Leftrightarrow] & \text{L21} & k_N \chi \vee \varphi = \uparrow \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
 & k_N \chi = k \rceil \varphi \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{L20b}"] & \\
 & \chi \equiv_N \rceil \varphi &
\end{tikzcd}
$$

▲

Következmény: /T29K/ $(\forall N)\ \overline{EBA}\ F_N$

Bizonyitás:

$$\overline{KEH}\ F_N \Longleftarrow \text{T29}$$

$$
\begin{tikzcd}
\overline{DEH}\ F_N & \varphi \wedge_N (\psi \vee_N \chi) \nabla (\varphi \wedge_N \psi) \vee_N (\varphi \wedge_N \chi) \arrow[l, Rightarrow] \\
 & \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv_N (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \arrow[u, Rightarrow, "\text{T29}"'] \\
 & k_N(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) = k((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)) \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

▲

<u>Tétel 30</u>: $N_1 \subset N \Longrightarrow \overline{SU}^2 F_N, N_1^*$

Bizonyitás:

$$\begin{tikzcd}[arrows=Rightarrow]
\varphi \in N_1^* \arrow[dd] & & \varphi \leq_N \psi \arrow[d] \\
& & k_N \varphi \leq_{B_o} k\psi \arrow[d] \\
k_{N_1} \varphi = \uparrow \arrow[dr] & & k_{N_1} \varphi \leq_{B_o} k\psi \arrow[dl] \\
& k_{N_1} \psi = \uparrow \arrow[d] & \\
& \psi \in N_1^* &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=Rightarrow]
\varphi \in N_1^* \arrow[d] & & \psi \in N_1^* \arrow[d] & & \chi \equiv_N \varphi \wedge \psi \arrow[dd] \\
k_{N_1} \varphi = \uparrow \arrow[dr] & & k_{N_1} \psi = \uparrow \arrow[dl] & & \\
& k_{N_1} \varphi \wedge \psi = \uparrow \arrow[rrr] & & & k_{N_1} \chi = \uparrow \arrow[d] \\
& & & & \chi \in N_1^*
\end{tikzcd}$$

▲

<u>Következmények</u>: /T30K/

a/ $\Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma \Longrightarrow \overline{SU}^2 F, \Sigma$

b/ $\leq_N \; = \; \lesssim_{N^*}$

c/ $R^{F_N} = R^F_{N^*}$

Bizonyitás:

a/ $\Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma \Longrightarrow \Sigma = (\Sigma^*)^* \;\&\; \Sigma^* \subset M \Longrightarrow \overline{SU}^2 F, \Sigma$

b/ $\varphi \leq_N \psi \Longleftrightarrow N = \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \varphi \to \psi \in N^* \Longleftrightarrow \varphi \lesssim_{N^*} \psi$

c/ T25

▲

<u>Tétel 31</u>: $(\exists \overline{SU}^2 F, \Sigma) \quad \Sigma \notin \mathcal{C}_\Sigma$

Bizonyitás:

$$\Sigma \stackrel{d}{=} \{\varphi \mid \neg \doteq x_1 x_2 \leq \varphi\} \qquad\qquad (\forall I, s)\, k\big(I, s(x_1/sx_2)\big)\, \neg \doteq x_1 x_2 = \downarrow$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\Sigma^* = \phi$$

$$\Downarrow$$

$$O \notin \Sigma \qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma^{**} = F$$

$$\searrow \qquad \swarrow$$

$$\Sigma \neq \Sigma^{**}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Vert$$

$$\overline{SU}^2 F, \Sigma \qquad\qquad \Sigma \notin \mathcal{C}_\Sigma$$

▲

<u>Megjegyzés</u>: /M8/ Sőt, $(\exists \overline{VSU}^2 F, \Sigma)(\nexists \overline{VSU}^2 F, \Sigma_1)\ \Sigma_1 \in \mathcal{C}_\Sigma \ \&\ \Sigma \subset \Sigma_1$

Bizonyitás:

A T31-ben definiált Σ szürő ilyen.

▲

Most vizsgáljuk az A halmazt.

<u>Tétel 32</u>: $\overline{RA}^2\ R_F,\ R_{\hat{A}}$

Bizonyitás:

$$X \in B^{\hat{A}} \Longleftrightarrow (\exists \varphi \in A)\, X = \hat{\varphi} \qquad\qquad (\forall \varphi, \psi \in A)\, \varphi \wedge \psi \in A$$

$$|\varphi| \wedge_F |\psi| = |\varphi \wedge \psi|$$

$$\Downarrow$$

$$(\forall X, Y \in B^{\hat{A}})\, X \wedge_F Y = X \wedge_{\hat{A}} Y$$

V-ra és $\neg$-re a bizonyitás ugyanigy megy.

$$\overline{RA}^2\ R^F,\ R^{\hat{A}} \xRightarrow{\ \uparrow\ T26\ } \overline{RA}^2\ R_F,\ R_{\hat{A}}$$

▲

Megjegyezzük, hogy $\hat{A} \subsetneq F$.

Következmény: /T32K/ $\overline{EBA}^2 \underline{\angle}, A$

Bizonyitás:

$$\begin{tikzcd} \overline{EBA}^2 \underline{\angle}, F \arrow[d, Rightarrow] & \overline{EBA}^2 \underline{\angle}, A \\ \overline{BA}\ R^F \arrow[r, Rightarrow] & \overline{BA}\ R^A \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

T32

▲

Könnyen belátható, hogy R_A szürői és ORA-i izomorfak R_A szürőivel és ORA-ival. Ilyen szempontból a két algebra ekvivalens. Időnként $R_{\hat{A}}$ -t könynyebb vizsgálni, mert részalgebrája R_F-nek, máskor R_A-t, mert csak A részhalmazaiból áll. R^A -t /és $|A|$-t/ Lindenbaum algebrának nevezik, R_A-t elő-Lindenbaum algebrának és $R_{\hat{A}}$-t beágyazott elő-Lindenbaum algebrának. T30 és T31-hez kapcsolódóan belátható, hogy R_A szürői pontosan megfelelnek $\mathcal{C}_\Sigma$ elemeinek, és igy F elméletekkel generálható ORA-i pontosan megfelelnek R_A ORA-inak. /Sok szerző, aki elsősorban az elméleteket vizsgálja, csak a Lindenbaum-algebrával foglalkozik, például [1]./

3.3 Az F halmaz szürői

Legyen L egy indexhalmaz és $\lambda \in E$.

$I_\lambda \overset{d}{=} \langle R,K,a,M_\lambda,\sigma_\lambda\rangle$ $\qquad$ $I \overset{d}{=} \{\langle\lambda,I_\lambda\rangle \mid \lambda \in E\}$

$\langle K,a,M^I,p^I\rangle \overset{d}{=} \prod_{\lambda \in E} \langle K,a,M_\lambda,\sigma_\lambda\rangle$, algebrák direkt szorzata

Legyen $D \subset \pi E$ és

$d_D^I : R \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^nM^I$ olyan, hogy $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \overset{d}{=} a \in {}^nM^I$ -re

$a \in d_D^I\, \rho_n \overset{d}{\Longleftrightarrow} \{\lambda \mid \overset{n}{\square}\, \varepsilon_\lambda a \in o_\lambda \rho_n\} \in D$

$\mathfrak{J}_D^I \overset{d}{=} \langle R,K,a,M^I,d_D^I \cup p^I\rangle$

Megjegyezzük, hogy általában $\mathfrak{d}_D^I \notin M(R,K)$, mert a $\doteq$ relációra vonatkozó feltételt nem teljesiti, de a $g\left(\mathfrak{d}_D^I, s\right)$, $k\left(\mathfrak{d}_D^I, s\right)$ függvények értelmezhetők. A felső I indexet gyakran elhagyjuk, ha ez nem vezet félreértéshez.

<u>Lemma 22</u>: a/ $\langle a,b\rangle \in d_D^I(\doteq) \Longleftrightarrow \{\lambda \mid \varepsilon_\lambda a = \varepsilon_\lambda b\} \in D$

b/ $\overline{SU}^2 \pi E, D \Longrightarrow \overline{EQ}^2\ d_D^I(\doteq), M^I$

Bizonyitás:

a/
$$\begin{array}{c}
\langle a,b\rangle \in d(\doteq) \Longleftrightarrow \{\lambda \mid \overset{2}{\square}\varepsilon_\lambda \langle a,b\rangle \in \sigma_\lambda(\doteq)\} \in D \\
\Updownarrow \\
\{\lambda \mid \langle \varepsilon_\lambda a, \varepsilon_\lambda b\rangle \in \sigma_\lambda(\doteq)\} \in D \\
\Updownarrow \\
\{\lambda \mid \varepsilon_\lambda a = \varepsilon_\lambda b\} \in D
\end{array}$$

b/
$$\begin{array}{c}
\langle a,b\rangle \in d(\doteq) \Longrightarrow \langle b,a\rangle \in d(\doteq) \\
\Uparrow \\
\text{L22a}
\end{array}$$

$$\langle a,a\rangle \in d(\doteq) \Longleftrightarrow E \in D$$

$$\{\lambda \mid \varepsilon_\lambda a = \varepsilon_\lambda b\} \cap \{\lambda \mid \varepsilon_\lambda b = \varepsilon_\lambda c\} \subset \{\lambda \mid \varepsilon_\lambda a = \varepsilon_\lambda c\}$$

▲

<u>Lemma 23</u>: $\overline{SU}^3 \subseteq, \pi E, D \qquad \left(\langle a,b\rangle \in \overset{n}{\square}\ d(\doteq) \Longleftrightarrow \{\lambda \mid \overset{n}{\square}\varepsilon_\lambda a = \overset{n}{\square}\varepsilon_\lambda b\} \in D\right)$

Bizonyitás:

$$\begin{array}{c}
\langle a,b\rangle \in \overset{n}{\square}\ d(\doteq) \\
\Updownarrow \\
(\forall i \in [1,n])\ \langle a_i, b_i\rangle \in d(\doteq) \\
\Updownarrow \longleftarrow \text{L22a} \\
(\forall i \in [1,n])\ \{\lambda \mid \varepsilon_\lambda a_i = \varepsilon_\lambda b_i\} \in D \\
\Updownarrow \longleftarrow \overline{SU}^3 \subseteq, \pi E, D \\
\bigcap_{i=1}^{n} \{\lambda \mid \varepsilon_\lambda a_i \in \varepsilon_\lambda b_i\} \in D \\
\Updownarrow \\
\{\lambda \mid \overset{n}{\square}\varepsilon_\lambda a = \overset{n}{\square}\ \varepsilon_\lambda b\} \in D
\end{array}$$

▲

<u>Tétel 33:</u>

$$\overline{SU}^3 \subseteq,\sqcap E,D \longrightarrow \overline{\forall K}^2\ d(\pm),\ \mathfrak{z}^I_D$$

Bizonyitás:

I.

$$\begin{tikzcd}
\langle a,b\rangle \in \overset{n}{\sqcap}\, d(\pm) \arrow[ddd, Rightarrow, "L23"] & \overline{SU}^3 \subseteq,\sqcap E,D \arrow[dddl, dashed] \arrow[dddd, Rightarrow] & a\in d\rho_n \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & \{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda a\in\sigma_\lambda\rho_n\}\in D \arrow[ddl, Rightarrow] \\
 & & \{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda b\in\sigma_\lambda\rho_n\} \supseteq \{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda a\in\sigma_\lambda\rho_n\} \cap \{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda a = \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda b\} \arrow[dl, dashed] \\
\{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda = \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda b\}\in D \arrow[dr, dashed] & & \\
 & \{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda b\in\sigma_\lambda\rho_n\}\in D \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & b\in d\rho_n &
\end{tikzcd}$$

II. $\overline{K}^2\ d(\pm)\ ,\ \mathfrak{z}^I_D$

Legyen $g_\lambda \overset{d}{=} \sigma_\lambda(\kappa_n)$, $g \overset{d}{=} p^I(\kappa_n)$

$$\begin{tikzcd}
\langle a,b\rangle \in \overset{n}{\sqcap}\, d(\pm) \arrow[r, Rightarrow, "L23"'] & \{\lambda \mid \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda a = \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda b\}\in D \arrow[d, Rightarrow] & \overline{SU}^3 \subseteq,\sqcap E,D \arrow[dl, dashed] \\
 & \{\lambda \mid g_\lambda \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda a = g_\lambda \overset{n}{\sqcap}\, \varepsilon_\lambda b\}\in D \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \{\lambda \mid \varepsilon_\lambda ga = \varepsilon_\lambda gb\}\in D \arrow[d, Rightarrow, "L22a"] & \\
 & \langle ga,gb\rangle \in d(\pm) &
\end{tikzcd}$$

▲

$$\equiv^I_D \overset{d}{=} d^I_D(\pm)$$

Az $I = \{<\lambda, I_\lambda>|\lambda \in E\}$ interpretációk D szürő szerint vett /szürt/ szorzata:

$$I_D^I \stackrel{d}{=} <R,K,a,M_D,o_D> \stackrel{d}{=} \mathfrak{I}_D^I/_{\equiv_D}$$

A felső I indexet gyakran elhagyjuk, ha ez nem vezet félreértéshez.

Legyen $s: Z \longrightarrow M^I$, ekkor

$s_D : Z \longrightarrow M_D$, ugy, hogy $s_D \stackrel{d}{=} s \circ \stackrel{v}{\equiv}_D$

$s_\lambda : Z \longrightarrow M_\lambda$, ugy, hogy $s_\lambda \stackrel{d}{=} s \circ \varepsilon_\lambda$

Az $<I_\lambda, s_\lambda>$ párok D-vel szürt szorzata:

$$\mathcal{U}s\left(\{<\lambda, I_\lambda, s_\lambda>|\lambda \in E\}, D\right) \stackrel{d}{=} <I_D, s_D>$$

<u>Lemma 24</u>: $h: I_1 \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\to} I_2 \Longrightarrow g(I_1, s) \circ h = g(I_2, s \circ h)$

Bizonyitás:

$$g(I_1,s)\circ h = \left(ext(T,I_1)s\right)\circ h \underset{\substack{\uparrow \\ h \text{ homomorfizmus}}}{=} ext\left(T,h(I_1)\right)(s\circ h) = g(I_2, s\circ h)$$

▲

<u>Tétel 34</u> /ultraszorzat-tétel/:

$$\overline{US}^2 \pi L, D \Longrightarrow \left(k(I_D, s_D)\varphi = \uparrow \Longleftrightarrow \{\lambda \in E|k(I_\lambda, s_\lambda)\varphi = \uparrow\} \in D\right)$$

Bizonyitás:

$$\overline{\mathfrak{I}\mathrm{O}}\ \varphi \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \left(k(I_D, s_D)\varphi = \uparrow \Longleftrightarrow \{\lambda \in E|k(I_\lambda, s_\lambda)\varphi = \uparrow\} \in D\right)$$

1/ $\varphi \in P \Longrightarrow \overline{\mathfrak{I}\mathrm{O}}\varphi$, mert:

Legyen $\varphi = \rho_n \tau_1 \ldots \tau_n$

$$
\begin{aligned}
k(I_D,s_D)\varphi = \uparrow &\Longleftrightarrow \langle g(I_D,s_D)\tau_1,\dots,g(I_D,s_D)\tau_n\rangle \in \overset{n}{\Box}\,\overset{V}{=}_D(d\rho_n) \Longleftrightarrow (L24)\\
&\Longleftrightarrow \langle \overset{V}{=}_D\, g(\mathfrak{J}_D,s)\tau_1,\dots,\overset{V}{=}_D g(\mathfrak{J}_D,s)\tau_n\rangle \in \overset{n}{\Box}\,\overset{V}{=}_D(d\rho_n) \Longleftrightarrow (T33)\\
&\Longleftrightarrow \langle g(\mathfrak{J}_D,s)\tau_1,\dots,g(\mathfrak{J}_D,s)\tau_n\rangle \in d\rho_n \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow \{\lambda \mid \langle \varepsilon_\lambda(g(\mathfrak{J}_D,s)\tau_1),\dots,\varepsilon_\lambda(g(\mathfrak{J}_D,s)\tau_n)\rangle \in \sigma_\lambda\rho_n\} \in D \Longleftrightarrow (L24)\\
&\Longleftrightarrow \{\lambda \mid \langle g(I_\lambda,s_\lambda)\tau_1,\dots,g(I_\lambda,s_\lambda)\tau_n\rangle \in \sigma_\lambda\rho_n\} \in D \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow \{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\rho_n\tau_1\dots\tau_n = \uparrow\} \in D
\end{aligned}
$$

2/ $\overline{\mathfrak{J}O}\,\varphi \Longrightarrow \overline{\mathfrak{J}O}\,\neg\varphi$, mert

$$
\begin{tikzcd}
k(I_D,s_D)\neg\varphi = \uparrow \arrow[d, Leftrightarrow] \\
k(I_D,s_D)\varphi = \downarrow \arrow[d, Leftrightarrow, "\mathfrak{J}O\varphi"'] \\
\{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\varphi = \uparrow\} \notin D \arrow[d, Leftrightarrow, "\overline{US}\ D"] \\
\{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\varphi = \downarrow\} \in D \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\neg\varphi = \uparrow\} \in D
\end{tikzcd}
$$

3/ $\overline{\mathfrak{J}O}\varphi \;\&\; \overline{\mathfrak{J}O}\psi \Longrightarrow \overline{\mathfrak{J}O}\ \varphi\wedge\psi$, mert

$$
\begin{tikzcd}
& k(I_D,s_D)\varphi\wedge\psi = \uparrow \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
k(I_D,s_D)\varphi = \uparrow \arrow[d, Leftrightarrow, "\overline{\mathfrak{J}O}\varphi"'] & & k(I_D,s_D)\psi = \uparrow \arrow[d, Leftrightarrow, "\overline{\mathfrak{J}O}\,\psi"] \\
\{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\varphi = \uparrow\} \in D \arrow[dr, Leftrightarrow] \arrow[rr, phantom, "\overline{SU}\ D" below] & & \{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\psi = \uparrow\} \in D \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& \{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\varphi = \uparrow\} \cap \{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\psi = \uparrow\} \in D \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
& \{\lambda \mid k(I_\lambda,s_\lambda)\varphi\wedge\psi = \uparrow\} \in D &
\end{tikzcd}
$$

4/ $\overline{\mathit{Jo}}\,\varphi \Longrightarrow \overline{\mathit{Jo}}\; c_i\varphi$, mert

$$
\begin{array}{c}
k(I_D, s_D)\, c_i\varphi = \uparrow \\
\Updownarrow \\
(\exists a)\ k\big(I_D, s_D(x_i/a)\big)\varphi = \uparrow \\
\Updownarrow \longleftarrow \overline{\mathit{Jo}}\,\varphi \\
(\exists a)\{\lambda \mid k\big(I_\lambda, s_\lambda(x_i/\varepsilon_\lambda a)\big)\varphi = \uparrow\} \in D \\
\Updownarrow \\
\{\lambda \mid k(I_\lambda, s_\lambda)\, c_i\varphi = \uparrow\} \in D
\end{array}
$$

5/ $\overline{\mathit{Jo}}\; d_{ij}$, mert ez a definicióból következik. ▲

Emlékeztetünk rá, hogy $\overline{EBA}^2\ \leq, H$.

Centrált halmaz /$\overline{Ce}$/

$\overline{Ce}^3\ E,\ \leq,\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} E \wedge_H E \triangle O_H$

Lemma 25: $\overline{Ce}^3\ E,\ \leq,\ H \Longrightarrow \big(\exists \overline{US}^3\ \leq,\ H,\ D\big)\, E \subset D$

Bizonyitás:

[1]V. 2.7-es tétele kimondja a fenti lemmát $\overline{BA}$ H esetére, az ott adott bizonyitás könnyen általánositható $\overline{EBA}$ H-ra. ▲

A következő tétel kimondja, hogy azok a formulahalmazok, melyek definiálhatók valamilyen I,s pár megadásával pontosan az F halmaz ultraszürői. Azaz a tétel egy logikai és egy algebrai tulajdonság ekvivalenciáját mondja ki. A logikai tulajdonság az, hogy ε definiálható mint adott interpretációban /I/ a szabad változók adott kiértékelése /s/ mellett igaz formulák halmaza. Az algebrai tulajdonság pedig az, hogy Σ az $\langle \leq, F \rangle$ előrendezett halmaz ultraszürője.

Ezen tulmenően a tétel kimondja azt is, hogy a fenti logikai tulajdonság azon változata, melynél kikötjük, hogy legyen $I \in N^{**}$, ekvivalens az algebrai tulajdonság $\langle \leq_N, F \rangle$-re vonatkozó változatával.

A fejezet hátralevő részében egymással ekvivalens algebrai és logikai tulajdonságpárok keresése folyik.

<u>Tétel 35:</u> $\overline{US}^2 F_N, U \Longleftrightarrow (\exists I \in N^{**}, s)\ k(I,s)^{-1}\uparrow = U$

Bizonyitás:

I. $(\forall I \in N^{**}, s)\ \overline{US}^2\ F_N,\ k(I,s)^{-1}\uparrow$

$$\begin{tikzcd}
I \in N^{**} \arrow[dddr, Rightarrow] & k(I,s)\varphi = \uparrow \arrow[ddd, Rightarrow] & \varphi \leq_N \psi \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & N \models \varphi \to \psi \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & N^{**} \models \varphi \to \psi \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & k(I,s)\psi = \uparrow &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \in N^{**} \arrow[dddrr, Rightarrow] & k(I,s)\varphi = \uparrow \arrow[dr, Rightarrow] & & k(I,s)\psi = \uparrow \arrow[dl, Rightarrow] & \chi \in \varphi \wedge_N \psi \arrow[d, Rightarrow, "T29a"] \\
 & & k(I,s)\varphi \wedge \psi = \uparrow \arrow[dd, Rightarrow] & & \chi \equiv_N \varphi \wedge \psi \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & & \chi \equiv_{N^{**}} \varphi \wedge \psi \arrow[dll, Rightarrow, "L20"'] \\
 & & k(I,s)\chi = \uparrow & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \in N^{**} \arrow[ddr, Rightarrow] & k(I,s)\varphi = \uparrow \arrow[d, Rightarrow] & \chi \in \neg_N \varphi \arrow[d, Rightarrow, "L29c"] \\
 & k(I,s)\neg\varphi = \downarrow \arrow[d, Rightarrow] & \chi \equiv_{N^{**}} \neg\varphi \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & k(I,s)\chi = \downarrow &
\end{tikzcd}$$

$$k(I,s)\varphi = \uparrow \Longleftrightarrow k(I,s)\neg\varphi = \downarrow$$

II. $\overline{US}^2\ F_N, U \Longrightarrow (\exists I \in N^{**}, s)\ k(I,s)^{-1}\uparrow = U$

$$\ell_\varphi \stackrel{d}{=} \{\psi \mid \psi \leq_N \varphi \;\&\; \psi \in U\}$$

$$L \stackrel{d}{=} \{\ell_\varphi \mid \varphi \in U\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \ell_1 \stackrel{d}{=} \ell_{\varphi_1} \in L \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \ell_2 \stackrel{d}{=} \ell_{\varphi_2} \in L \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\varphi_1 \in U \arrow[ddr, Rightarrow] & & \ell_1 = \{\psi \mid \psi \leq_N \varphi_1 \;\&\; \psi \in U\} \arrow[ddr, Rightarrow] & \varphi_2 \in U \arrow[ddll, Rightarrow] & & \ell_2 = \{\psi \mid \psi \leq_N \varphi_2 \;\&\; \psi \in U\} \arrow[ddll, Rightarrow] \\
\overline{SU}^2 F_N, U \arrow[dr, Rightarrow] & & & & & \\
 & \varphi_1 \wedge_N \varphi_2 \subset U \arrow[dr, Rightarrow] & & \ell_1 \cap \ell_2 = \{\psi \mid \psi \leq_N \varphi_1 \;\&\; \psi \leq_N \varphi_2 \;\&\; \psi \in U\} \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \varphi_1 \wedge_N \varphi_2 \arrow[drr, Rightarrow] & & \varphi_1 \wedge_N \varphi_2 \subset \ell_1 \cap \ell_2 \arrow[d, Rightarrow] & & & \\
 & & \ell_1 \cap \ell_2 \neq \phi & & &
\end{tikzcd}$$

Legyen $\overline{US}^3 \subset, \pi F, D \;\&\; L \subset D$. Ilyen van L25 miatt.

$$\begin{tikzcd}
\overline{VSU}^3 \leq_N, F, U \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \varphi \in U \arrow[d, Rightarrow] \\
F \neq U \arrow[rr, Rightarrow] & & \sim \varphi \leq_N O_N \arrow[d, Rightarrow, "\text{L20a./}"] \\
 & & \sim (\forall I \in N, s)\ k(I,s)\varphi = \downarrow
\end{tikzcd}$$

Tehát , $(\forall \varphi \in U)\left(\overset{d}{\exists}\ I_\varphi \in N, s_\varphi\right)\ k(I_\varphi, s_\varphi)\varphi = \dagger$

$\varphi \in \ell_\psi$

$\varphi \leq_N \psi$ $\qquad$ $\varphi \in U$

$k(I_\varphi, s_\varphi)\psi = \dagger$

$\varphi \in \{\chi \in U \mid k(I_\chi, s_\chi)\psi = \dagger\}$

Tehát, $(\forall \psi \in F)\ \ell_\psi \subset \{\chi \in U \mid k(I_\chi, s_\chi)\psi = \dagger\}$.

$\psi \in U$

$\ell_\psi \in L$ $\qquad$ $L \subset D$ $\qquad$ $\overline{US}^3 \subseteq, \pi F, D$

$\ell_\psi \in D$

$\{\chi \in U \mid k(I_\chi, s_\chi)\psi = \dagger\} \in D$

$\langle I_D, s_D\rangle = Us\left(\{\langle \varphi, I_\varphi, s_\varphi\rangle \mid \varphi \in U\}, D\right)$

$k(I_D, s_D)\psi = \dagger$

Tehát, $(\forall \psi \in U)\ k(I_D, s_D)\psi = \dagger$ $\qquad$ $\psi \notin U$

$\overline{US}\ U$

$\rceil \psi \in U$

$k(I_D, s_D) \rceil \psi = \dagger$

$k(I_D, s_D)\ \psi = \downarrow$

Igy, $\varphi \in U \Longleftrightarrow k(I_D, s_D)\varphi = \uparrow$

$$
\begin{array}{l}
(\forall \varphi \in U)\ I_\varphi \in N \\
\Big\Downarrow \\
(\forall \varphi \in U)\ I_\varphi \models N^* \\
\Big\Downarrow \\
(\forall \varphi \in N^*)\ \{\psi \in U \mid I_\psi \models \varphi\} = U \in D \\
\Big\Downarrow \longleftarrow \text{T34} \\
I_D^I \models N^* \\
\Big\Downarrow \\
I_D^I \in N^{**}
\end{array}
$$

▲

Kielégitő /$\overline{Ke}$/

$$\overline{Ke}\ \Sigma \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\exists I, s)\ k(I,s)\Sigma = \uparrow$$

Következmény: /T35K1/ $\overline{Ke}\ \Sigma \Longleftrightarrow \overline{Ce}\ \Sigma$

Következmény: /T35K2/ a/ $\overline{SU}^3 \leq_M, A, S \Longleftrightarrow S = S^{**} \cap A$

b/ $\{S \mid \overline{SU}^3 \leq_M, A, S\} = \mathcal{C}_\Sigma \widetilde{\bigcap} \{A\}$

Bizonyitás:

a/

I.

$$\begin{tikzcd}
\overline{SU}^2 A,S \arrow[dd] \arrow[ddrrr] & & \varphi \in A \setminus S \arrow[ddddd, Rightarrow] \arrow[ddr] & & \\
& & & \psi \wedge \neg\varphi \leq 0 \arrow[r, Rightarrow, "L12"] \arrow[d] & \psi \leq \varphi \\
A \supset S \arrow[dddrr, Rightarrow] & & & (\forall \psi \in S)\ \psi \wedge \neg\varphi \nleq 0 \arrow[d, Rightarrow, "L25"] & \\
& & & \left(\overset{d}{\exists}\ \overline{US}^2 F,K\right) K \supset \left(S \cup \{\neg\varphi\}\right) \arrow[d, Rightarrow, "T35"] \arrow[ddl] & \\
& & & \left(\overset{d}{\exists} I,s\right)\ k(I,s)K = \dagger \arrow[dl, Rightarrow] & \\
& & I \models S \cup \{\neg\varphi\} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
& & I \models S \,\&\, \sim I \models \varphi \arrow[d, Rightarrow] & & \\
& & \varphi \notin S^{**} & &
\end{tikzcd}$$

II.

$$\varphi, \psi \in S^{**} \cap A \Longrightarrow \varphi \wedge \psi \in S^{**} \cap A$$

$$\varphi \in S^{**} \cap A \,\&\, \psi \in A \,\&\, \varphi \leq \psi \Longrightarrow \psi \in S^{**} \cap A$$

$$1 \in S^{**} \cap A$$

b/

$$T \in \{S \mid \overline{SU}^3 \leq_M, A, S\} \underset{\text{T35Ka}}{\Longleftrightarrow} T \in \mathcal{C}_\Sigma \widetilde{\cap} \{A\}$$

▲

$H\widehat{X}Sz \overset{d}{\equiv} \bigcap \{Y \mid \overline{SU}^2 H, Y \;\&\; X \subset Y\}$

$\widehat{\Sigma}Sz \overset{d}{\equiv} F\widehat{\Sigma}Sz$

Legyen $Z_1 \subset Z$, ekkor

$\text{Ɔ}_{Z_1}: F \longrightarrow A$, ugy hogy

$\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}\} = v\varphi \cap Z_1 \;\&\; i_1 \leq \ldots \leq i_n \Longrightarrow \text{Ɔ}_{Z_1} \overset{d}{\equiv} \text{Ɔ}_{i_1} \ldots \text{Ɔ}_{i_n}\varphi$

<u>Lemma 26</u>: a/ $\Sigma^{**} \supset \text{Ɔ}_Z \Sigma$

b/ $\Sigma^{**} \supset \widehat{\Sigma}^{Sz}$

Bizonyitás:

a/ $N \models \varphi \Longleftrightarrow N \models \text{Ɔ}_Z\varphi$

b/
$$\begin{tikzcd}
\overline{SU}^2F, \Sigma^{**} \arrow[dr, Rightarrow] & & \Sigma^{**} \supset \Sigma \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \Sigma^{**} \supset \widehat{\Sigma}Sz &
\end{tikzcd}$$

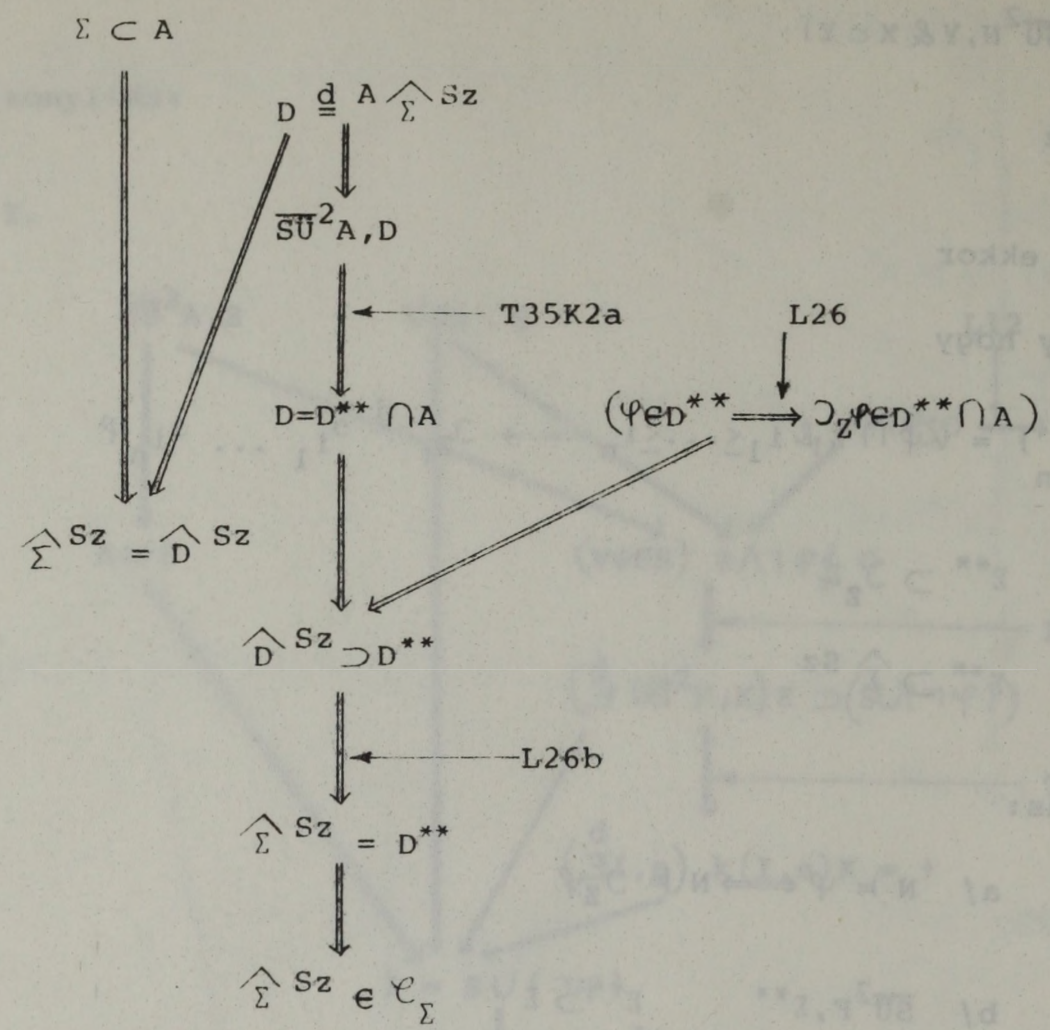
▲

<u>Tétel 36</u>: $\mathcal{C}_\Sigma = \{\widehat{\Sigma}^{Sz} \mid \Sigma \subset A\}$

Bizonyitás:

I.
$$\begin{tikzcd}
& S \in \mathcal{C}_\Sigma \arrow[d, Rightarrow] & \\
& S = S^{**} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\overline{SU}^2F, S & & S \supset \text{Ɔ}_Z S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\overline{SU}^2F, T \arrow[ddr, Rightarrow] & & T \supset \text{Ɔ}_Z S \arrow[ddl, Rightarrow] \\
& & \text{Ɔ}_Z\varphi \leq \varphi \arrow[dl, Rightarrow] \\
& T \supset S &
\end{tikzcd}$$

II.



▲

<u>Következmény</u>: /T36K/ $\quad \Sigma^{**} = \widehat{\mathcal{O}_Z \Sigma}\, Sz$

Bizonyitás:

$$\Sigma^{**} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L26a}}}{=} (\mathcal{O}_Z \Sigma)^{**} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L26b}}}{\supset} \widehat{\mathcal{O}_Z \Sigma}\, Sz \in \mathcal{C}_\Sigma$$

▲

Megjegyezzük, hogy $\quad \Sigma^{**} \cap A = \mathcal{O}_Z(\Sigma^{**})$

<u>Tétel 37</u>: /Kompaktsági tétel/ $\quad \overline{AZR}\ \mathcal{C}_\Sigma$

Bizonyitás:

$$T5 \xRightarrow{\text{L13}} \overline{AZR}\quad \{\Sigma \mid \overline{SU}^2 F, \Sigma\} \Longrightarrow \left(\stackrel{d}{\exists} \mathcal{L}\right)\left(\overline{SU}^2 F, \Sigma \longleftrightarrow \overline{RA}^2 \mathcal{L}, \Sigma\right)$$

Legyen $\mathcal{L} = \left\langle \Omega_{\mathcal{L}},\ a_{\mathcal{L}},\ F,\ \sigma_{\mathcal{L}} \right\rangle$.

$$\mathfrak{S} \overset{d}{\equiv} \left\langle \Omega_{\mathcal{L}} \cup \{ɔ_i \mid i \in \omega\},\ a_{\mathcal{L}} \cup a_{\mathfrak{S}},\ F,\ \sigma_{\mathcal{L}} \cup \sigma_{\mathcal{L}} \right\rangle$$, ahol

$$a_{\mathfrak{S}} \overset{d}{\equiv} \{\langle ɔ_i, 1\rangle \mid i \in \omega\}$$ és

$$\sigma_{\mathfrak{S}} \overset{d}{\equiv} \sigma_w \big|_{\{ɔ_i \mid i \in \omega\}}$$

$$\overline{RA}^2\, \mathfrak{S}, \Sigma \Longleftrightarrow \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma$$, mert

$$\begin{tikzcd}
\overline{RA}^2\, \mathfrak{S},\Sigma \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\bar{Z}^2\{ɔ_i \mid i\in\omega\} \arrow[d, Rightarrow] & \bar{Z}^2\Omega_{\mathcal{L}},\Sigma \arrow[d, Rightarrow] \\
\Sigma \supset Ɔ_Z\Sigma \arrow[d, Rightarrow] & \overline{SU}^2 F,\Sigma \arrow[dl, Rightarrow] \\
\Sigma \supset \widehat{Ɔ_Z\Sigma}^{Sz} \arrow[d, Rightarrow, "\longleftarrow T36K"] & \\
\Sigma = \Sigma^{**} \arrow[d, Rightarrow, "\longleftarrow L26a"] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\Sigma \supset Ɔ_Z\Sigma \arrow[d, Rightarrow] & \overline{SU}^2 F,\Sigma \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\bar{Z}^2\ \{ɔ_i \mid i\in\omega\},\Sigma \arrow[d, Rightarrow] & \bar{Z}^2\,\Omega_{\mathcal{L}},\Sigma \arrow[dl, Rightarrow] \\
\overline{RA}^2\, \mathfrak{S},\Sigma &
\end{tikzcd}$$

▲

Megjegyezzük, hogy a kompaktsági tétel fent kimondott alakjával ekvivalens következő alakjai is használatosak az irodalomban:

a/ $\Sigma \models \varphi \Longleftrightarrow (\exists \Sigma_o \Subset \Sigma)\ \Sigma_o \models \varphi$ x/

b/ $(\exists I) I \models \Sigma \Longleftrightarrow (\forall \Sigma_o \Subset \Sigma)(\exists I) I \models \Sigma_o$

---

x/ $A \Subset B \overset{d}{\Longleftrightarrow} A$ véges részhalmaza B-nek.

<u>Tétel 38</u> /Általánositott kompaktsági tétel/

$$\overline{Ke}\ \Sigma \Longleftrightarrow (\forall \Sigma_o \ \underline{\mathrm{v}}\ \Sigma)\ \overline{Ke}\ \Sigma_o$$

Bizonyitás:

$$\begin{array}{c}
\overline{Ke}\ \Sigma_o \\
\Big\Downarrow \text{— T35} \\
(\exists I,s)\ k(I,s)^{-1} \uparrow \ \supset \widehat{\Sigma_o}^{Sz} \\
\Big\Downarrow \\
0 \notin \widehat{\Sigma_o}^{Sz}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(\forall \Sigma_o \ \underline{\mathrm{v}}\ \Sigma)\ \overline{Ke}\ \Sigma_o \\
\Big\Downarrow \\
(\forall \Sigma_o \ \underline{\mathrm{v}}\ \Sigma)\ \widehat{\Sigma_o}^{Sz} \not\ni 0 \\
\Big\Downarrow \leftarrow \text{T5} \\
0 \notin \widehat{\Sigma}^{Sz} \\
\Big\Downarrow \leftarrow \text{L25} \\
(\exists \overline{US}\ U)\ U \supset \widehat{\Sigma}^{Sz} \\
\Big\Downarrow \leftarrow \text{T35} \\
\overline{Ke}\ \Sigma
\end{array}$$

▲

Megjegyezzük, hogy T38-t a fentinél rövidebben beláthattuk volna, mint T5 és T35K1 következményét.

Megjegyezzük, hogy a kompaktsági tétel b/ alakja és T38 az analógia kiemelése végett a következőképp is irhatók:

$$(\exists I)(\forall s)\ k(I,s)^{-1}\uparrow \ \supset \Sigma \Longleftrightarrow (\forall \Sigma_o \ \underline{\mathrm{v}}\ \Sigma)(\exists I)(\forall s)\ k(I,s)^{-1}\uparrow \ \supset \Sigma_o$$

$$(\exists I)(\exists s)\ k(I,s)^{-1}\uparrow \ \supset \Sigma \Longleftrightarrow (\forall \Sigma_o \ \underline{\mathrm{v}}\ \Sigma)(\exists I)(\exists s)\ k(I,s)^{-1}\uparrow \ \supset \Sigma_o$$

3.4. A szintaktika és szemantika kapcsolata

A kompaktsági tétel bizonyitásánál megadtunk egy konkrét algebrát az F halmazon, melynek zárt halmazai pontosan az elméletek. Felhivjuk a figyelmet azonban arra, hogy a müveletek definiálásánál felhasználtuk a $\leq_M$ relációt, azaz ennél az algebránál a müveletek eredményének kiszámolásához a szemantikai következmény ismeretére van szükség. Ha célunk az, hogy valamely axiómahalmazból a vele generált elméletet tisztán szintaktikai eszközökkel állitsuk elő, ez az algebra nem felel meg a célnak. A Gödel teljességi tétel megad az F halmazon egy a fentivel ekvivalens algebrát, melynek különös jelentősége az, hogy a müveletek pusztán szintaktikai eszközökkel vannak definiálva. Ez alatt azt kell érteni, hogy egy müvelet eredményének kiszámitása során csak az argumentum szintaktikai felépitésével, azaz a benne szereplő jelekkel és azok sorrendjével kell dolgozni /és nem kell például az argumentum interpretációval/. Ezáltal a szemantikai fogalmak kezelésére velük ekvivalens szintaktikai eszközök állnak rendelkezésre. Nevezetesen, a $\leq$ reláció egybeesik a szintaktikai levezethetőséggel, igy szintaktikus uton definiálható a $\leq$ előrendezés az F halmazon. Ezzel az előző fejezet logikai és algebrai tulajdonságok ekvivalenciáját kimondó tételei biztositják a fenti kapcsolatot. Például T35 segitségével szintaktikusan definiálható a Σ formulahalmazok azon szemantikai tulajdonsága, hogy Σ-hoz található olyan I,s pár, amelyre $k(I,s)^{-1}\dagger = \Sigma$, azaz $\overline{Ke}\ \Sigma$.

Emlékeztetünk arra, hogy a röviditett irásmóddal az F halmaz elemeire csak utalunk, melyek azonban változatlanul az eredeti definició szerint épülnek fel. Szabadon követi x_i az α jelsorozatot $/\overline{S}/$

$$S^2\ x_i,\alpha \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall\beta c_i\gamma = \alpha)(\exists\varphi)\alpha = \beta c_i\varphi\delta \qquad {}^{x}/$$

Szabadon fordul elő x_i a δ-ban α-val kezdődően $/\overline{Sz}/$

$$\overline{Sz}^3\ x_i,\alpha,\delta \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{S}^2\ x_i,\alpha\ \&\ \delta = \alpha x_i\beta$$

$$r_{1i}(\delta) = \alpha \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{Sz}^3\ x_i,\alpha,\delta\ \&\ \sim(\exists\beta\gamma = \alpha)\ \overline{Sz}^3\ x_i,\beta,\delta$$

$$r_{2i}(\delta) = \beta \overset{d}{\Longleftrightarrow} \delta = r_{1i}(\delta)\ x_i\beta$$

---

x/ α,β,γ és δ jelsorozatok, $\alpha\beta$ pedig az α és a β jelsorozat egymásutánirásával keletkező jelsorozat. /Megengedünk nulla hosszuságu jelsorozatot is./

Az x_i szabad előfordulásait τ-val helyettesitő $h(x_i,\tau)$ függvény:

$h(x_i,\tau)\delta \overset{d}{=} \delta$, ha $\sim(\exists\alpha)\overline{Sz}^3\ x_i,\alpha,\delta$. Ellenkező esetben

$h(x_i,\tau)\delta \overset{d}{=} r_{1i}(\delta)\tau\, h(x_i,\tau)\ r_{2i}(\delta)$

Megjegyezzük, hogy hasonló dolgok két különböző szellemben való definiciója a fenti $h(x_i,\tau)$ függvény, és a korábbiakban megadott $v(\varphi)$ függvény definiciója. Definiálhattuk volna $v(\varphi)$-t /a fenti szellemben/ ugy, hogy

$$x_i \in v\varphi \Longleftrightarrow (\exists\alpha)\ \overline{Sz}^3\ x_i,\alpha,\varphi \quad ,$$

vagy a $h(x_i,\tau)$ függvényre is adhattunk volna rekurziv definiciót. Ez egy példa arra, hogy a problémamegfogalmazáshoz és a problémamegoldáshoz adekvát nyelv általában nem esik egybe. A $v\varphi$ fenti definiciója tömörebb és olvashatóbb, ezzel szemben az eredeti definició alkalmasabb bizonyitások céljaira.

Definiáljuk a $\langle Q^1,a,F,\sigma\rangle$ algebrát. Q^1, a és σ definicióját indirekt módon $Q = \sigma Q^1$ definicióval adjuk meg. Értelemszerüen

$$Q_i \overset{d}{=} \sigma Q_i^1$$

$$Q_o \overset{d}{=} \bigcup_{i=o}^{20} q_i \quad ; \quad Q_1 \overset{d}{=} \{s_{2i},s_{3i} \mid i\in\omega\} \quad ; \quad Q_2 \overset{d}{=} \{s_1\}$$

ahol

$$q_o \overset{d}{=} \{\varphi\to\varphi \mid \varphi\in F\}$$

$$q_1 \overset{d}{=} \{(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)) \mid \varphi,\psi,\chi\in F\}$$

$$q_2 \overset{d}{=} \{\varphi\to(\varphi\vee\psi) \mid \varphi,\psi\in F\}$$

$$q_3 \overset{d}{=} \{\psi\to(\varphi\vee\psi) \mid \varphi,\psi\in F\}$$

$$q_4 \overset{d}{=} \{(\varphi\to\chi)\to((\psi\to\chi)\to((\varphi\vee\psi)\to\chi)) \mid \varphi,\psi,\chi\in F\}$$

$$q_5 \overset{d}{=} \{\varphi\wedge\psi\to\varphi \mid \varphi,\psi\in F\}$$

$$q_6 \overset{d}{=} \{\varphi\wedge\psi\to\psi \mid \varphi,\psi\in F\}$$

$$q_7 \overset{d}{=} \{(\chi\to\varphi)\to((\chi\to\psi)\to(\chi\to(\varphi\wedge\psi))) \mid \varphi,\psi,\chi\in F\}$$

$$q_8 \overset{d}{\equiv} \{\varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in F\}$$

$$q_9 \overset{d}{\equiv} \{\varphi \vee \neg\varphi \mid \varphi \in F\}$$

$$q_{10} \overset{d}{\equiv} \{(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)) \rightarrow \neg\varphi \mid \varphi \in F\}$$

$$q_{11} \overset{d}{\equiv} \{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \mid \varphi, \psi, \chi \in F\}$$

$$q_{12} \overset{d}{\equiv} \{((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi) \mid \varphi, \psi, \chi \in F\}$$

$$q_{13} \overset{d}{\equiv} \{\supset_i \varphi \rightarrow h(x_i, \Upsilon)\varphi \mid i \in \omega, \varphi \in F, \Upsilon \in T, \sim(\Upsilon = \beta x_j \gamma \;\&\; \overline{sz}^3 x_i, \alpha, \varphi \;\&\; \sim\bar{s}^2 x_j, \alpha)\}$$

$$q_{14} \overset{d}{\equiv} \{h(x_i, \Upsilon)\varphi \rightarrow c_i \varphi \mid i \in \omega, \varphi \in F, \Upsilon \in T, \sim(\Upsilon = \beta x_j \gamma \;\&\; \overline{sz}^3 x_i, \alpha, \varphi \;\&\; \sim\bar{s}^2 x_j, \alpha)\}$$

$$q_{15} \overset{d}{\equiv} \{d_{ii} \mid i \in \omega\}$$

$$q_{16} \overset{d}{\equiv} \{d_{ij} \rightarrow d_{ji} \mid i, j \in \omega\}$$

$$q_{17} \overset{d}{\equiv} \{(d_{ij} \wedge d_{jk}) \rightarrow d_{ik} \mid i, j, k \in \omega\}$$

$$q_{18} \overset{d}{\equiv} \{d_{ij} \leftrightarrow (x_i \doteq x_j) \mid i, j \in \omega\}$$

$$q_{19} \overset{d}{\equiv} \{d_{ij} \rightarrow (h(x_i, x_j)\varphi \leftrightarrow \varphi) \mid i, j \in \omega, \varphi \in F\}$$

$$q_{20} = \{d_{ij} \rightarrow (h(x_i, x_j)\, \Upsilon \doteq \Upsilon) \mid i, j \in \omega, \Upsilon \in T\}$$

$$s_1 \overset{d}{\equiv} f_1 \cup q \Big|_{etq \setminus etf_1} \quad , \text{ahol}$$

$$f_1 \overset{d}{\equiv} \{\langle \varphi \rightarrow \psi, \varphi, \psi \rangle \mid \varphi, \psi \in F\} \qquad \text{és}$$

$$q \overset{d}{\equiv} \{\langle \varphi, \psi, \psi \rangle \mid \varphi, \psi \in F\}$$

$$s_{2i} \stackrel{d}{=} f_{2i} \cup \Delta_F \Big|_{et\Delta_F \setminus et\, f_{2i}} \quad , \quad \text{ahol}$$

$$f_{2i} \stackrel{d}{=} \{\langle \varphi \to \psi,\ \varphi \to \supset_i \psi \rangle \mid \varphi, \psi \in F, x_i \notin v\varphi\}$$

$$s_{3i} \stackrel{d}{=} f_{3i} \cup \Delta_F \Big|_{et\Delta_F \setminus et\, f_{3i}} \quad , \quad \text{ahol}$$

$$f_{3i} \stackrel{d}{=} \{\langle \varphi \to \psi,\ c_i \varphi \to \psi \rangle \mid \varphi, \psi \in F,\ x_i \notin v\psi\}$$

$$\mathcal{C}_Q \stackrel{d}{=} \{\Sigma \mid \overline{RA}^2 \langle Q^1, a, F, \sigma \rangle, \Sigma\}$$

Megjegyezzük, hogy a fentivel ekvivalens algebrát kapunk, ha a Q_o halmaz $\bigcup_{i=o}^{12} q_i$ része helyett a következő halmazt adjuk meg:

$$\{\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi,\ \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi),\ \varphi \wedge (\psi \vee \neg \psi) \leftrightarrow \varphi \mid \varphi, \psi, \chi \in F\} \quad ,$$

és módositjuk s_1-et ugy, hogy ne csak $\langle \varphi \to \psi, \varphi \rangle$-hez, hanem $\langle \varphi \leftrightarrow \psi, \varphi \rangle$ -hez is ψ-t rendeljen.

Tétel 39: /Gödel, teljességi/

$$\cap \mathcal{C}_Q = 1_F$$

Bizonyitás:

Lásd például [5].

▲

Megjegyezzük, hogy T39 a következőképp is kimondható:

$$\leq_Q = \leq_F \quad , \quad \text{ahol}$$

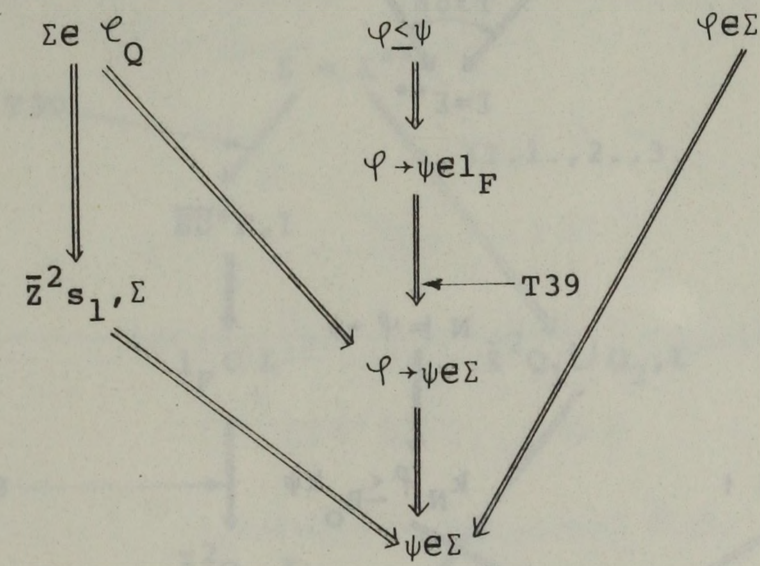
$$\varphi \leq_Q \psi \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \varphi \to \psi \in \cap \mathcal{C}_Q$$

<u>Tétel 40</u>: $\mathcal{C}_Q = \mathcal{C}_\Sigma$

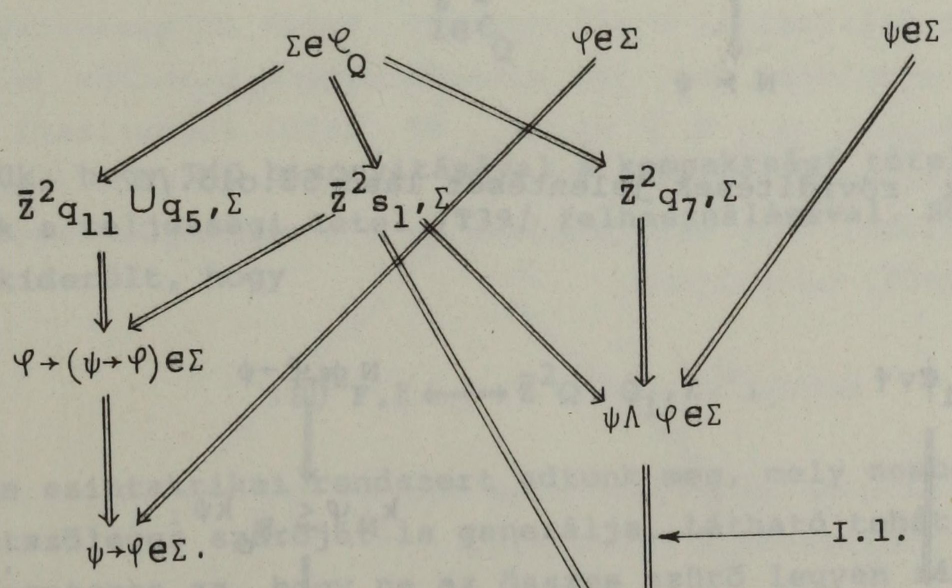
Bizonyitás:

I.

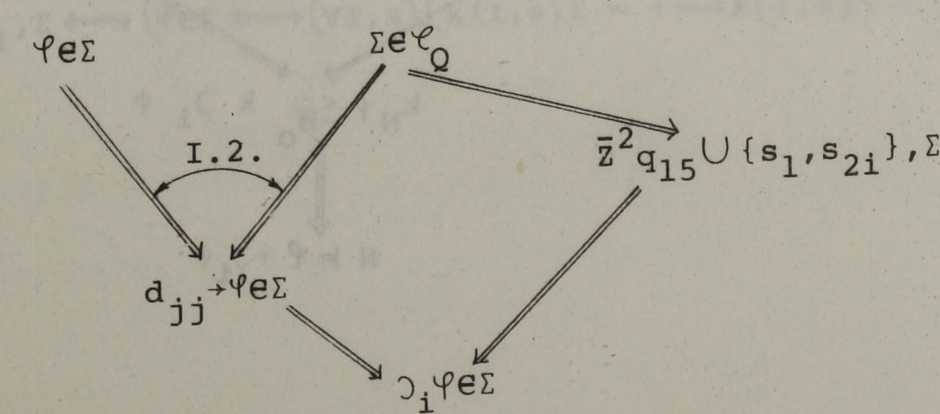
1/



2/



3/



$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Sigma\in\mathscr{C}_Q \arrow[dl, "\mathrm{I.1.,2.}"'] \arrow[dr, "\mathrm{I.3.}"] & \\
\Sigma\supset\Sigma^{\widehat{Sz}} \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\overset{\mathrm{T36K}}{\frown}" near end] & & \Sigma\supset\text{Ɔ}_Z\Sigma \arrow[dl] \\
 & \Sigma=\Sigma^{**} &
\end{tikzcd}$$

II.

1/

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
N\models\varphi \arrow[d, Rightarrow] & & N\models\varphi\to\psi \arrow[d, Rightarrow] \\
k_N\varphi=\uparrow \arrow[dr] & & k_N\varphi\leq_{B_O}k\psi \arrow[dl] \\
 & k_N\psi=\uparrow \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & N\models\psi &
\end{tikzcd}$$

/A k_N és k röviditések jelentését lásd 53.old./

2/

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
x_i\notin v\varphi \arrow[dd, Rightarrow] & & N\models\varphi\to\psi \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & k_N\varphi\leq_{B_O}k\psi \arrow[d, Rightarrow] \\
(\forall a\in M_I)\ k(I,s(x_i/a))\varphi=k(I,s)\varphi \arrow[dr] & & (\forall I\in N,s,a\in M_I)\ k(I,s(x_i/a))\varphi\leq_{B_O}k(I,s(x_i/a))\psi \arrow[dl] \\
 & k_N\varphi\leq_{B_O}k\,\text{Ɔ}_i\,\psi \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & N\models\varphi\to\text{Ɔ}_i\psi &
\end{tikzcd}$$

3/

$$\begin{tikzcd} x_i \notin v\psi \arrow[dr] & & N \models \varphi \to \psi \arrow[dl] \\ & N \models c_i\varphi \to \psi & \end{tikzcd}$$

melynek bizonyitása a II.2.-höz hasonló.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \Sigma = \Sigma^{**} \arrow[dl] \arrow[ddr, "\text{II.1.,2.,3.}"] & \\ \text{T30} \arrow[r] & \overline{SU}^2F,\Sigma \arrow[d, Rightarrow] & & \\ & 1_F \subset \Sigma \arrow[d, Rightarrow] & & \bar{Z}^2Q_1 \cup Q_2,\Sigma \arrow[ddl, Rightarrow] \\ \text{T39} \arrow[r] & \bar{Z}^2Q_o,\Sigma \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & & \Sigma \in \mathcal{C}_Q & \end{tikzcd}$$

▲

Megjegyezzük, hogy T40 bizonyitásával a kompaktsági tétel /T37/ egy bizonyitását adtuk a teljességi tétel /T39/ felhasználásával. Sőt, a bizonyitás során az is kiderült, hogy

$$\overline{SU}^2F,\Sigma \Longleftrightarrow \bar{Z}^2Q \setminus Q_1,\Sigma\ ,$$

tehát olyan szintaktikai rendszert adtunk meg, mely nemcsak az elméleteket, hanem F tetszőleges szürőjét is generálja. Látható tehát, hogy a Q_1 müveletek célja pontosan az, hogy ne az összes szürő legyen zárt halmaz, hanem csak az elméletek /az A részhalmazaival generált szürők/. Azaz, T39 általánositása:

$$\bar{Z}^2Q \setminus Q_1,\Sigma \Longleftrightarrow \big(\varphi \in \Sigma \Longleftrightarrow (\forall I,s)\big(k(I,s)\Sigma = \uparrow \Longrightarrow k(I,s)\varphi = \uparrow\big)$$

3.5. Metanyelv

3.5.1. A metanyelv és alapvető tulajdonságai

Metaváltozójelek halmaza: $\mathcal{Z} \stackrel{d}{=} \{y_i \mid i \in \omega\}$

Metarelációjelek halmaza: $\mathcal{R} \stackrel{d}{=} \mathcal{R}_2 \stackrel{d}{=} \{\approx\}$

Metamüveletjelek halmaza: $\mathcal{K} \stackrel{d}{=} L$ /L-en az "a" függvény értelmezése változatlan/

Metakifejezések: $\mathcal{T} \stackrel{d}{=} W_L(\mathcal{Z})$

Primmetaformulák: $\mathcal{P} \stackrel{d}{=} \{\approx\} \times^2 \mathcal{T}$

Metamondattani jelek: $\mathcal{L} \stackrel{d}{=} \{\underline{\wedge}, \underline{\neg}, \underline{c}_i, \underline{d}_{ij} \mid i,j \in \omega\}$

Metaformulák: $\mathcal{F} \stackrel{d}{=} W_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) \stackrel{d}{=} \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{K})$

$\mathcal{F}$ modelltere: $\mathcal{M} \stackrel{d}{=} \{\langle \approx, L, a, A, \sigma \rangle \mid o(\approx) = \Delta_A\}$

Megjegyezzük, hogy a fenti definició helyett elég lett volna, ha

$\mathcal{F} \stackrel{d}{=} F(\approx, L)$ -ként definiáljuk a metanyelvet. Azért választottuk mégis a hosszadalmasabb megoldást, mert igy elkerülhettünk bizonyos jelölésbeli kényelmetlenségeket, pl. $\underline{d}_{ij} \in \mathcal{F}$ és $d_{ij} \in F$. Ettől függetlenül $\mathcal{F}$-re és a kapcsolódó fogalmakra érvényesek az F-re bizonyitott tételek. Azért vezettük be a metanyelvet, hogy segitségével az elsőrendü predikátumkalkulusbeli nyelvekről /F-ekről/ beszéljünk.

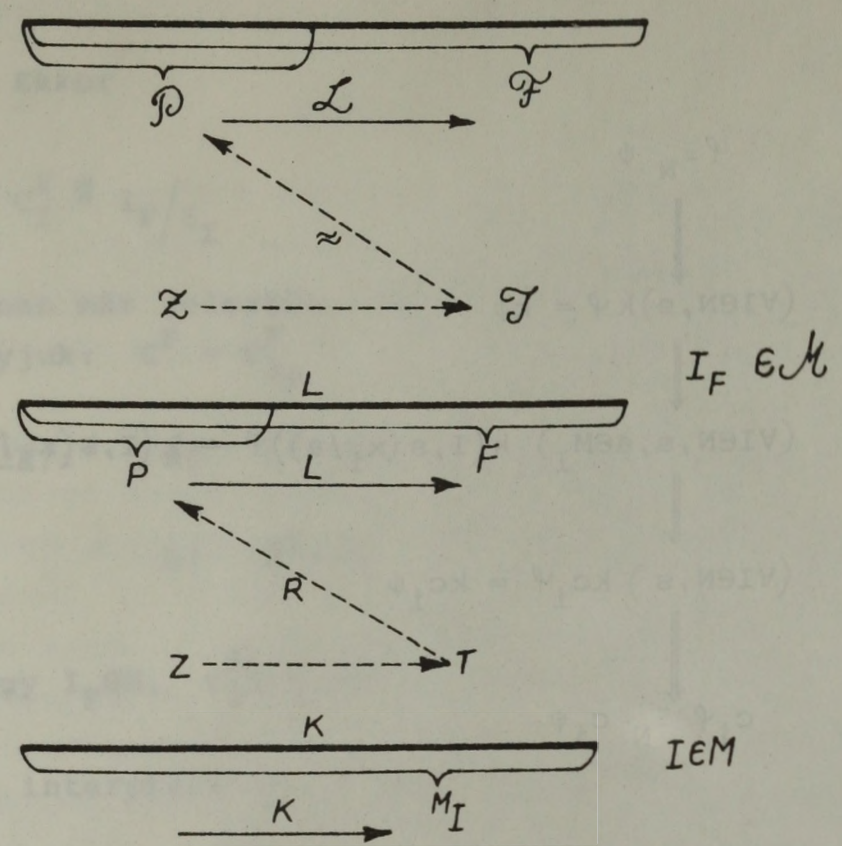
$$I_F \stackrel{d}{=} \langle \approx, L, a, F, \sigma_w \cup \{\langle \approx, \Delta_F \rangle\} \rangle$$

A következőképp illusztrálhatjuk, hogy hogyan épülnek fel a modellterekből a nyelvek, és a nyelvekből a metanyelv.

Metanyelv-szint

Nyelv-szint

Modell-szint



Emlékezzünk rá, hogy $\overline{SU}^2 F,\Sigma \Longrightarrow \left(\varphi \equiv_\Sigma \psi \overset{d}{\Longleftrightarrow} \leftrightarrow \psi \in \Sigma\right)$.

<u>Tétel 41</u>: $\bar{K}^2 \equiv_\Sigma, I_F \Longleftrightarrow \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma$

Bizonyítás:

I.

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{K}^2 \equiv_{\dot{\Sigma}}, F \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{definíció}"] & \\
(\varphi \equiv_\Sigma 1 \overset{\cdot}{\Longrightarrow} c_i\varphi \equiv c_i 1) \arrow[d, Rightarrow] & & \overline{SU}^2 F,\Sigma \arrow[ddl, Rightarrow] \\
\Sigma \supset \partial_Z \Sigma \arrow[dr, Rightarrow] & \arrow[d, phantom, "\text{T36K}"] & \\
 & \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma &
\end{tikzcd}
$$

II.

$$
\begin{array}{c}
\varphi \equiv_N \psi \\
\Downarrow \\
(\forall I \in N, s)\, k\varphi = k\psi \\
\Downarrow \\
(\forall I \in N, s, a \in M_I)\ k(I, s(x_i/a))\varphi = k(I, s(x_i/a))\psi \\
\Downarrow \\
(\forall I \in N, s)\ kc_i\varphi = kc_i\psi \\
\Downarrow \\
c_i\varphi \equiv_N c_i\psi
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\overline{SU}^2 F,\Sigma \arrow[dd] & & \Sigma = \Sigma^{**} \arrow[d, Rightarrow, "\text{T30Kb,L19}"] \\
& & \equiv_\Sigma = \equiv_{\Sigma^*} \arrow[d, Rightarrow, "\text{II.1.}"] \\
\bar{K}^2 \equiv_\Sigma, \langle\{\wedge, \neg\}, F\rangle \arrow[dr, Rightarrow] & & \bar{K}^2 \equiv_\Sigma, \langle c_i, F\rangle \arrow[dl] \\
& \bar{K}^2 \equiv_\Sigma, I_F &
\end{tikzcd}
$$

▲

Ez a tétel jól mutatja, hogy miért szokás kizárólag a $\mathcal{C}_\Sigma$ elemeivel foglalkozni. Mindazonáltal T35 indokolja F többi szürőjének vizsgálatát is.

Megjegyzés:

A $k(I,s)$ függvény definiciójánál nem tehettük meg azt az egyszerüsitést /az induktiv lépések felsorolását ext függvénnyel helyettesiteni/, ami a többi hasonló függvénynél megtettünk. Ennek oka, hogy

$$(\exists I, s) \sim \bar{K}^2\ k(I,s)^{o}\ ,\ I_F\ .$$

Legyen $\Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma$. Ekkor

$$C_\Sigma^F \stackrel{d}{=} I_F / \equiv_\Sigma$$

Mint a korábbiakban már jeleztük, $\mathcal{C}_\Sigma^F$ -t algebraként is használjuk, és az 1_F indexet elhagyjuk: $C^F = C_{1_F}^F$.

Következmény /T41K/: a/ $C^F \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow C \Longleftrightarrow (\exists \Sigma)\ C \cong C_\Sigma^F$

b/ $\bar{K}^2 r, I_F \ \&\ r \supset \equiv \Longleftrightarrow (\exists \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma) r = \equiv_\Sigma$

Megjegyezzük, hogy $I_F \in M$, $C_\Sigma^F \in \mathcal{M}$ és $I_F \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow I_{\mathcal{T}}$.

Az $\mathcal{F}$ nyelv C_Σ^F interpretációi képezik jelen fejezet tárgyát.

$$C_\Sigma^F \stackrel{d}{=} \langle L, a, B_\Sigma^F, \sigma_\Sigma \rangle$$

$$\mathcal{B}(C_\Sigma^F) \stackrel{d}{=} \langle \Gamma, a, B^F, \sigma_\Sigma |_\Gamma \rangle \quad , \quad C_\Sigma^F \text{ Boole-része.}$$

Tétel 42: $\mathcal{B}(C_\Sigma^F) = P_\Sigma^F$

Bizonyitás:

$$\varphi \wedge \psi \in \varphi \wedge_{\Sigma^*} \psi$$

$$\varphi \vee \psi \in \varphi \vee_{\Sigma^*} \psi$$

$$\neg \varphi \in \neg_{\Sigma^*} \varphi$$

▲

Következmény: A $\mathcal{B}(C_\Sigma^F)$ -kra és az elméletekkel generált P_Σ^F -kre ugyanazok a tételek igazak.

Az előző fejezetekben elmondottak $\Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma$ -kra vonatkozó részét közvetlenül is megkaphattuk volna a C_Σ^F k vizsgálatából. Itt kiindulhattunk volna abból, hogy ha $\Sigma_1 \subset \ldots \subset \Sigma_n$, akkor

$I_F \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow C^F \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow C_{\Sigma_1}^F \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow \ldots \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow C_{\Sigma_n}^F$. Emlékeztetünk azonban arra, hogy P_Σ^F -hoz csak akkor van C_Σ^F , ha $\Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma$. Tehát ezen az egyszerübb uton az előző fejezeteknek csak az elméletekre vonatkozó részét kaphattuk volna meg.

Ezt jól illusztrálja a következő

Következmény: /T31T41K/

$$\left(\exists \bar{K}^2 r, P^F\right) \sim \bar{K}^2 r, C^F$$

3.5.2. Cilindrikus algebrák

Logika alatt egy, a következő szerkezetü rendszert értünk: adva van egy jelhalmaz X, egy nyelv $N \subset X^*$ a hozzátartozó interpretációs szabályokkal és egy zárt halmazrendszer $\mathcal{C}$ az N halmaz fölött. Valamely $\Sigma \subset N$ logikai következményei /az általa generált elmélet/ a Σ lezárása $\mathcal{C}$ szerint. Ha $\mathcal{C}$ algebrai /és szintaktikailag definiálható/, akkor adhatók szintaktikai következtetési szabályok. Ilyen logikák pl. az ítéletkalkulus, a különböző rendü predikátumkalkulusok, a többtipusu logikák [5], stb. Az ítéletkalkulus zárt rendszeréhez tartozó algebrák a Boole-algebrák, a predikátumkalkulus zárt rendszeréhez tartozó algebrák pedig a cilindrikus algebrák.

A Boole-algebrák és cilindrikus algebrák elsőrendü /logikai/ definiciója: /kényelmi okokból most F helyett az $\mathcal{F}$ nyelvet használjuk, de ennek semmi tartalmi jelentősége nincs/

Legyen $\Sigma_B^{**} \subset \mathcal{F}(\approx, \{\wedge, \neg\})$, ugy, hogy

$$\Sigma_B \overset{d}{=} \{ y_1 \wedge y_2 \approx y_2 \wedge y_1$$

$$y_1 \wedge \neg(\neg y_2 \wedge \neg y_3) \approx \neg\left(\neg(y_1 \wedge y_2) \wedge \neg(y_1 \wedge y_3)\right),$$

$$y_1 \wedge \neg\left(y_2 \wedge \neg y_2\right) \approx y_1 \}$$

Boole-algebra /$\overline{BA}$/

$$\overline{BA}\, \mathcal{L} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L} \in \Sigma_B^*$$

Megjegyzés: Az a definició, melyet a Boole-algebrára Σ_B segitségével adtunk, ekvivalens a cikk elején adott definicióval. Ha az $\langle \{\wedge, \neg\}, a, A, \Theta \rangle$ algebrára érvényes a következő három egyenlet:

$$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$$

$$x_1 \wedge \neg(\neg x_2 \wedge \neg x_3) = \neg\left(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_3)\right)$$

$$x_1 \wedge \neg(x_2 \wedge \neg x_2) = x_1$$

akkor definiálható a

$$0 \stackrel{d}{=} x_1 \wedge \neg x_1$$

nullaargumentumu levezetett müvelet, és bevezetve a V,1 levezetett müveleteket, a fenti algebrára érvényes lesz a cikk elején adott definició 12 egyenlete. A bizonyitás és az ilyen jellegü definiciós ekvivalencia fogalom pontosabb tárgyalása megtalálható [6]-ban.

Legyen $\Sigma_c^{**} \subset \mathcal{F}(\approx, L)$, ugy, hogy

$$\Sigma_c \stackrel{d}{=} \Sigma_B \cup \bigcup_{i=1}^{7} e_i \quad \text{, ahol}$$

$$e_1 \stackrel{d}{=} \{c_i \neg d_{11} \approx \neg d_{11} \mid i \in \omega\}$$

$$e_2 \stackrel{d}{=} \{y_1 \wedge c_i y_1 \approx c_i y_1 \mid i \in \omega\}$$

$$e_3 \stackrel{d}{=} \{c_i (y_1 \wedge c_i y_2) \approx c_i y_1 \wedge c_i y_2 \mid i \in \omega\}$$

$$e_4 \stackrel{d}{=} \{c_i c_j y_1 \approx c_j c_i y_1 \mid i,j \omega\}$$

$$e_5 \stackrel{d}{=} \{d_{ii} \approx \neg (y_1 \wedge \neg y_1) \mid i \in \omega\}$$

$$e_6 \stackrel{d}{=} \{d_{jk} \approx c_i (d_{ji} \wedge d_{ik}) \mid i,j,k \in \omega, \quad i \neq j \ \& \ i \neq k\}$$

$$e_7 \stackrel{d}{=} \{c_i (d_{ij} \wedge y_1) \wedge c_i (d_{ij} \wedge \neg y_1) \approx \neg d_{11} \mid i,j \in \omega, \quad i \neq j\}$$

Cilindrikus algebra /$\overline{CA}$/

$$\overline{CA} \mathcal{L} \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L} \in \Sigma_c^*$$

Használhattunk volna levezetett müveleteket /mivel azok csak röviditett irásmódot jelentenek/ Σ_c megadásánál, a következő módon:

$$\Sigma_B = \{y_1 \wedge y_2 \approx y_2 \wedge y_1$$

$$y_1 \wedge (y_2 \vee y_3) \approx (y_1 \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_3)$$

$$y_1 \wedge (y_2 \vee \neg y_2) \approx y_1\}$$

$$e_1 = \{c_i 0 \approx 0 \mid i \in \omega\}$$

$$e_5 = \{d_{ii} \approx y_1 \vee \neg y_1 \mid i \in \omega\}$$

Tétel 43: $C^F_\Sigma \in (C^F)^{**}$

Bizonyitás:

$$C^F \xrightarrow{\sim} C^F_\Sigma$$

▲

Megjegyzés /M9/: $\sim \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \Longrightarrow \sim C^F_{\Sigma_2} \in \left(C^F_{\Sigma_1}\right)^{**}$

Bizonyitás:

$$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\overset{d}{\exists}\varphi\right)\varphi \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$$
$$\Downarrow$$
$$C^F_{\Sigma_1} \models \varphi \,\&\, \sim C^F_{\Sigma_2} \models \varphi$$

▲

Sejtés /S1/: $\Sigma^{**}_c = \left(C^F\right)^*$

Azaz, Σ_c a metanyelvben pontosan a C^F_Σ -k elméletét generálja. A sejtés rávilágit a cilindrikus algebrák elméletének logikai jelentőségére. Emlékeztetünk rá, hogy mivel $\mathcal{R} = \{\approx\}$ és $\Sigma_c \subset \mathcal{P}$, a cilindrikus algebrákra igazak a 3.1. fejezet végén elmondottak. A következő tétellel ekvivalens tétel található [3]-ban, de egészen más formában.

Tétel 44: $\Sigma^{**}_c \subset \left(C^F\right)^*$

Bizonyitás:

$$C^F \overset{d}{=} \langle \approx, L, a, B^F, \sigma \rangle$$

1/ $C^F \models \Sigma_B$, mert

$$\sigma\wedge = \wedge_F\big|_{B^F}$$

$$\sigma\neg = \neg_F\big|_{B^F}$$

/lásd T43/

$C^F \models e_1$, mert minden $i \in \omega$ -ra:

2/
$$C^F \models c_i \neg d_{11} \approx \neg d_{11}$$
$$\Uparrow$$
$$(\forall s)\ g(C^F,s)c_i\neg d_{11} = g(C^F,s)\neg d_{11}$$
$$\Uparrow$$
$$\sigma c_i\ \sigma\neg\ \sigma d_{11} = \sigma\neg\ \sigma d_{11}$$
$$\Uparrow$$
$$\sigma c_i\ \sigma\neg|d_{11}| = \sigma\neg|d_{11}|$$
$$\Uparrow$$
$$\sigma c_i|\neg d_{11}| = |\neg d_{11}|$$
$$\Uparrow$$
$$|c_i\neg d_{11}| = |\neg d_{11}|$$
$$\Uparrow$$
$$(\forall I,s)\ k(I,s)c_i\neg d_{11} = k(I,s)\neg d_{11}$$

3/
$$C^F \models e_2 \quad \text{, mert}$$
$$C^F \models y_1 \wedge c_i y_1 \approx c_i y_1$$
$$\Uparrow$$
$$(\forall s)\ g(C^F,s)\ y_1 \wedge c_i y_1 = g(C^F,s)c_i y_1 \qquad /sy_1 \overset{d}{=} |\varphi|/$$
$$\Uparrow$$
$$(\forall\varphi)|\varphi|\sigma\wedge\ \sigma c_i|\varphi| = \sigma c_i|\varphi|$$
$$\Uparrow$$
$$(\forall\varphi)|\varphi\wedge c_i\varphi| = |c_i\varphi|$$
$$\Uparrow$$
$$(\forall I,s)\ k(I,s)\ \varphi\wedge c_i\varphi = k(I,s)c_i\varphi$$

4/
$$C^F \models e_6 \quad \text{, mert}$$
$$(\forall I,s)\ k(I,s)d_{jk} = k(I,s)\ c_i(d_{ji}\wedge d_{ik}) \Longleftarrow i\neq j\ \&\ i\neq k$$

5/

$$C^F \models e_3 \cup e_4 \cup e_5 \cup e_7 \quad , \quad \text{mert}$$

az állitás 2/ -4/ -hez hasonlóan belátható ▲

Sejtés 2: C^* a legkisebb C^F-et tartalmazó, egyenletekkel axiomatizálható osztály /variety/.

3.6. n-edrendü predikátumkalkulus

Ebben a fejezetben végig müveletjelmentes logikákkal foglalkozunk, azaz $K = \phi$, hogy a definiciók áttekinthetőbbek legyenek. Ezt azért tehetjük meg, mert ahogy [7]-ben részletesen megtalálható:

$F(R,K)$-hoz szintaktikusan definiálható Σ_K ugy, hogy $\Sigma_K \subset F(R \cup K, \phi)$ és $M(R,K) = \Sigma_K^* \subset M(R \cup K, \phi)$

/ahol F-t és M-t a' szerint képeztük, ahol $\rho \in R$-re $a'\rho = a\rho$ és $\kappa \in K$ -ra $a'\kappa = a\kappa + 1$/ és egy μ: $F(R,K) \leftrightarrow F(R \cup K, \phi)$, melyre

$$k(I,s)\varphi = k(I',s)\mu\varphi \quad ,$$

/ahol I és I′ ugyanaz az algebrai rendszer, a különbség csupán jelölésbeli: $I' = \langle R \cup K, \phi, a', M_I, \sigma_I \rangle$/.

Összefoglalva, minden $\langle F(R,K), \mathcal{C}_\Sigma \rangle$ -hoz tartozik egy vele szemantikusan és szintaktikusan ekvivalens $\langle F(R',\phi), \mathcal{C}'_\Sigma \rangle$.
Érdekes még, hogy az $F(R',\phi)$ nyelvre [7]-ben bevezetett egyszerüsitett irásmód szintaktikailag és szemantikailag megegyezik az $F(R,K)$ nyelvvel, annak a további egyszerüsitésnek ellenére, hogy az $\doteq \in R'$ nincs kikötve.
Érdemes még megjegyezni, hogy az $F(R',\phi)$ nyelv az általánosság csökkenése nélkül olyan egyszerüsitéseket eredményez, hogy például a metanyelv és tárgynyelv között nem kell különbséget tenni ahhoz, hogy a metanyelv formulái egyértelmüek legyenek.

3.6.1. Nyelv

n-edrendü m-argumentumu változók: $Z^n_m \overset{d}{=} \{x^n_{m,i} \mid i \in \omega\}$

$$n \geq 2\text{-re } Z^n \overset{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} Z^n_m \quad , \quad Z^1 \overset{d}{=} Z$$

n-edrendü mondattani jelek: $L^n \overset{d}{=} \{\wedge, \neg, c_i, d_{ij}, c^k_{m,i}, d^k_{m,i,j} \mid i,j \in \omega, m>0, 0<k\leq n\}$

n-edrendü primformulák:

$$P^{o} \stackrel{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} R_{m} \times {}^{m}K_{o}$$

$$P^{1} \stackrel{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} R_{m} \times {}^{m}Z$$

$$n \geq 2 \text{ -re} \quad P^{n} \stackrel{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_{m}^{n} \times {}^{m}Z^{n-1}$$

n-edrendü formulák:

$$F^{n} \stackrel{d}{=} W_{L^{n}} \left(\bigcup_{m=o}^{n} P^{m} \right)$$

3.6.2. Interpretáció

Interpretáció és modelltér megegyezik az elsőrendü predikátumkalkuluséval, azaz $\langle R, K_{o}, a, M_{I}, \sigma_{I} \rangle$ alaku.

3.6.3. Kiértékelés, zárt halmazok

$$U_{m}^{n}(A) \stackrel{d}{=} \pi^{m} U^{n-1}(A)$$

$$U^{1}(A) \stackrel{d}{=} A$$

$$U^{n}(A) \stackrel{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{m}^{n}(A)$$

$$s \Big|_{Z_{m}^{n}} : Z_{m}^{n} \longrightarrow U_{m}^{n}(M_{I})$$

Kiterjesztjük a $k(I,s)$ függvényt n-edrendü nyelvre:

ha $x_{mi}^{n} \propto \epsilon P^{n}$, akkor

$$k(I,s)x^n_{m,i}\alpha = \uparrow \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overset{m}{\Box}\, s\alpha \in sx^n_{m,i}$$

$$k(I,s)c^1_{m,i}\varphi \overset{d}{=} k(I,s)c_i\varphi$$

$$n \geq 2 \text{ -re } k(I,s)c^n_{m,i}\varphi = \uparrow \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall a \in U^n_m(M_I))\ \ k\big(I,s\big(x^n_{m,i}/a\big)\big)\varphi = \uparrow$$

$$k(I,s)d^1_{m,i,j} \overset{d}{=} k(I,s)d_{ij}$$

$$n \geq 2 \text{ -re } k(I,s)d^n_{m,i,j} \overset{d}{=} \uparrow \overset{d}{\Longleftrightarrow} sx^n_{m,i} = sx^n_{m,j}$$

A $k(I,s)$ függvényre vonatkozó többi kikötést megadtuk a 3. fejezet elején.

Az érvényesség definiciója ugyanaz, mint a 3. fejezetben, de most már a kiterjesztett $k(I,s)$ függvénnyel.

$$\overset{n}{N^*} \overset{d}{=} \{\varphi \in F^n \mid N \models \varphi\} \quad ; \quad \overset{1}{N^*} \overset{d}{=} N^*$$

$$\mathcal{C}^n_\Sigma \overset{d}{=} \{\Sigma \mid \overset{n}{\Sigma^{**}} = \Sigma\} \quad ; \quad \mathcal{C}^1_\Sigma \overset{d}{=} \mathcal{C}_\Sigma$$

$$\mathcal{C}^n_N = \{N \mid \overset{n}{N^{**}} = N\} \quad ; \quad \mathcal{C}^1_N \overset{d}{=} \mathcal{C}_N$$

3.6.4. Szintaktika és szemantika kapcsolata

$n \geq 2$ esetére a szintaktika és szemantika kapcsolata nem ugyanolyan, mint elsőrendüre, például nem igaz a kompaktsági tétel:

<u>Tétel 45</u>: $(\exists \Sigma \subset F^2)\big((\forall \Sigma_0 \,\underline{\textcircled{v}}\, \Sigma)(\exists I)I \models \Sigma_0 \,\&\, \sim (\exists I)I \models \Sigma\big)$

Bizonyitás:

$$\varphi_1 \overset{d}{=} \neg c^2_{2,1}\big((\supset_1 x^2_{2,1}\ x_1x_1 \wedge \supset_1\supset_2\supset_3\big(x^2_{2,1}x_1x_2 \wedge x^2_{2,1}x_2x_3 \rightarrow x^2_{2,1}x_1x_3\big) \wedge \supset_1 c_2 x^2_{1,1}x_1x_2\big)$$

$$\varphi_2 \overset{d}{=} c_1c_2\neg d_{12}$$

$$\varphi_3 \overset{d}{=} c_1c_2c_3\big(\neg d_{12} \wedge \neg d_{13} \wedge \neg d_{23}\big)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n \overset{d}{=} c_1c_2\ldots c_n\big(\neg d_{12} \wedge \ldots \wedge \neg d_{1n} \wedge \neg d_{23} \wedge \ldots \wedge \neg d_{n-1,n}\big)$$

$$\Sigma \overset{d}{=} \{\varphi_i \mid i \in \omega \setminus \{0\}\}$$

φ_1 azt mondja ki, hogy a modellnek véges sok eleme van,

$\varphi_n(n \geq 2)$ pedig azt, hogy a modellnek legalább n eleme van.

Σ bármely Σ_o véges részhalmazának van modellje, mig Σ-nak nincs. ▲

<u>Következmény</u>: /T45K/ $\sim(\exists\varphi\in F)(I \models \varphi \Longleftrightarrow I \models \varphi_1)$,

azaz φ_1 nem fogalmazható meg elsőrendü nyelven.

Bizonyitás:

$$
\begin{tikzcd}
 & I \models \varphi \Longleftrightarrow I \models \varphi_1 \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddr] & (\forall\Sigma_o \underset{v}{\subset} \Sigma)(\exists I) I \models \Sigma_o \arrow[dd, Rightarrow] \\
 & (\exists I)\, I \models \varphi \Longleftrightarrow (\exists I)\, I \models \varphi_1 \arrow[ddd, Rightarrow] & \\
 & & (\forall\Sigma_o \underset{v}{\subset} \Sigma\setminus\{\varphi_1\}\cup\{\varphi\})(\exists I) I \models \Sigma_o \arrow[d, Rightarrow, "T"] \\
 T45 \arrow[d] & & (\exists I)\, I \models \Sigma\setminus\{\varphi_1\}\cup\{\varphi\} \arrow[dl] \\
 \sim(\exists I)\, I \models \Sigma & (\exists I)\, I \models \Sigma &
\end{tikzcd}
$$

▲

Most definiálunk egy ekvivalenciarelációsereget M-n.

$$I_1 \overset{n}{\underset{.}{\equiv}} I_2 \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overset{n}{I_1^*} = \overset{n}{I_2^*}$$

<u>Tétel 46</u>:

a/ $\overline{EQ}^{2 \cdot \overset{n}{\equiv}}$, M

b/ $k \leq n \Longrightarrow \overset{k}{\equiv} \subset \overset{n}{\equiv}$

A bizonyitás egyszerü számolással történik. ▲

Tétel 47: $\overset{1}{\equiv} \neq \overset{2}{\equiv}$

Bizonyitás: T45K

▲

A következő tétel azt mondja ki, hogy a $\overset{1}{\equiv}$ szerinti megkülönböztethetetlenség nemcsak számosságban, de szerkezetileg eltérő mondellekre is fennáll.

Tétel 48:

$$\left(\exists<\mathfrak{A},\mathfrak{B}>\in \overset{1}{\equiv} \setminus \overset{2}{\equiv}\right) \sim \left(\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}\right)$$

Bizonyitás:

Legyen $\mathfrak{A} \overset{d}{=} <\{\leq,\ell\},\ a,\ A,\mathfrak{a}>$ olyan hogy

A az egész számok halmaza

$$\mathfrak{a}(\leq) \overset{d}{=} \left\{<a,b>\in{}^2A\{a \leq b\right\}$$

$$\mathfrak{a}(\ell)n \overset{d}{=} n + 1$$

Legyen $\overline{US}^2$ $U,\pi\omega$ olyan, hogy $\sim(\exists a\in\omega)\{Y|a\in Y\subset\omega\} = U$,

ekkor $U\supset\{Y\in\pi\omega|(\omega\setminus Y)$ véges$\}$

$$I \overset{d}{=} \{<i,\mathfrak{A}>|i\in\omega\}$$

$\mathfrak{B} \overset{d}{=} \mathfrak{z}^{I}_{U}$ ahol $\mathfrak{B} \overset{d}{=} <\{\leq,\ell\},\ a,\ B,\mathfrak{b}>$

1/ $\mathfrak{A} \overset{1}{\equiv} \mathfrak{B}$, következik az ultraszorzat-tételből

2/ $\sim(\exists h)h : \mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$, mert

Tegyük fel, hogy $h : \mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$

legyen $a \overset{d}{=} <0,0,\ldots>$

$b \overset{d}{=} <0,1,2,3,\ldots>$

$$
\begin{tikzcd}
h : \mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{A} \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] \arrow[dddd, Rightarrow, bend right] & \langle a,b\rangle \in \mathfrak{B}(\leq) \arrow[d, Rightarrow] \\
& (\overset{d}{\exists} n)\left((\mathfrak{A}(\ell))^{n} \, ha = hb\right) \arrow[d, Rightarrow] \\
& \left\langle (\mathfrak{A}(\ell))^{n+1} \, ha, \, hb \right\rangle \notin \mathfrak{A}(\leq) \arrow[d, Rightarrow] \\
(\mathfrak{A}\ell)^{n+1} \, ha = h\left((\mathfrak{B}\ell)^{n+1} \, a\right) \arrow[r, Rightarrow] & \left\langle h\left((\mathfrak{B}(\ell))^{n+1} \, a\right), \, hb \right\rangle \notin \mathfrak{A}(\leq) \arrow[d, Rightarrow] \\
& \left\langle (\mathfrak{B}(\ell))^{n+1} \, a, b \right\rangle \notin \mathfrak{B}(\leq)
\end{tikzcd}
$$

Ez ellentmondás, mert igaz, hogy $(\forall n \in \omega)\left\langle (\mathfrak{B}(\ell))^{n} \, a, b \right\rangle \in \mathfrak{B}(\leq)$

3/ $\sim \mathfrak{A} \overset{2}{\equiv} \mathfrak{B}$

Az $\xleftrightarrow{d}$ jelet a definicióelméleti szabályokat betartva [5], ugy használjuk, hogy a definiált relációjelek röviditett irásmódnak tekinthetők.

$$
\nu x^{2}_{1,1} \xleftrightarrow{d} \neg c^{2}_{2,1}\Big(\text{Ɔ}_1\big(x^{2}_{1,1}x_1 \to c_2 x^{2}_{2,1}x_1x_2\big) \wedge \big(x^{2}_{1,1}x_1 \wedge x^{2}_{1,1}x_2 \wedge \neg d_{12} \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \big(x^{2}_{2,1}x_1x_3 \wedge x^{2}_{2,1}x_2x_4 \to \neg d_{34}\big)\big)\Big) \wedge c_1\big(x^{2}_{1,1}x_1 \wedge \neg x^{2}_{2,1}x_1x_1\big)\Big) \quad \text{x/}
$$

$$
\varphi \overset{d}{\equiv} \text{Ɔ}_1\text{Ɔ}_2\Big(\nu x^{2}_{1,1} \wedge \big((x_1 \leq x_3 \wedge x_3 \leq x_2) \longleftrightarrow x^{2}_{1,1}x_3\big)\Big)
$$

$$
\varphi \in F^2 \;\&\; \mathfrak{A} \models \varphi \;\&\; \sim \mathfrak{B} \models \varphi
$$

▲

---

x/ νX azt jelenti, hogy az X halmaz véges.

Megjegyzés:

$$<<\{\leq\}, a, A, \mathfrak{A}>, <\{\leq\} a, B, \mathfrak{B}>> \in \underline{\underline{1}} \setminus \underline{\underline{2}}$$, ahol

$A \overset{d}{=} \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ és $\mathfrak{A}(\leq)$ a szokásos rendezés A-n.

$B \overset{d}{=} \{0,1\} \times A$ és $\mathfrak{B}(\leq)$ a lexikografikus rendezés B-n.

A bizonyitást nem közöljük, mert az általunk ismert változaton más közelitést igényel, mint az eddigiek.

<u>Sejtés 3</u>: $(\forall n \in \omega)\ \underline{\underline{n}} \neq \underline{\underline{n \pm 1}}$

3.7. <u>Többtipusu logikák</u>

3.7.1. <u>Nyelv</u>

Tipusok halmaza: $\mathcal{J}$; egy jelhalmaz $\alpha \overset{d}{\in} \mathcal{J}$

α-tipusu változók: $Z^{\alpha} \overset{d}{=} \{x_i^{\alpha} \mid i \in \omega\}$

Mondattani jelek: $L^{\mathcal{J}} \overset{d}{=} \{\wedge, \neg, c_i^{\alpha}, d_{ij}^{\alpha} \mid i,j \in \omega, \alpha \in \mathcal{J}\}$

$\alpha_1 \ldots \alpha_n$ -tipusu relációjelek halmaza: $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ $\quad R \overset{d}{=} \bigcup \{R\gamma \mid \gamma \in I^*\}$

Primformulák: $P^{\mathcal{J}} \overset{d}{=} \bigcup \{R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \times Z^{\alpha_1} \times \ldots \times Z^{\alpha_n} \mid \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathcal{J}^*\}$

Formulák: $F^{\mathcal{J}} \overset{d}{=} W_{L^{\mathcal{J}}}(P^{\mathcal{J}})$

3.7.2. <u>Interpretáció, modelltér</u>

Interpretáció: $I^{\mathcal{J}} \overset{d}{=} <R, a, M, m, \sigma>$, ahol

R: jelhalmaz

a: $R \longrightarrow \mathcal{J}^*$ $\quad a^{-1}(\gamma) \overset{d}{=} R\gamma$

M: halmaz, a hordozó

$$m:\ M \longrightarrow \mathcal{J} \qquad m^{-1}(\alpha) \overset{d}{=} M^{\alpha}$$

$$o\Big|_{R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}} :\ R_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \longrightarrow \pi M^{\alpha_1} \times \dots \times M^{\alpha_n}$$

Modelltér: $M^{\mathcal{J}} \overset{d}{=} \{\langle R,\ a,\ M,\ m,\ \sigma\rangle \,|\, M,\ m,\ \sigma$ tetszőleges$\}$

3.7.3. Kiértékelés, zárt halmazok

$$s\Big|_{Z^{\alpha}} :\ Z^{\alpha} \longrightarrow M^{\alpha}$$

$$k(I,s)\rho x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_n}^{\alpha_n} = \uparrow \overset{d}{\Longleftrightarrow} \underset{\Box}{n}\, s\langle x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_n}^{\alpha_n}\rangle \in \sigma\rho$$

$$k(I,s)d_{ij}^{\alpha} = \uparrow \qquad \overset{d}{\Longleftrightarrow} \qquad sx_i^{\alpha} = sx_j^{\alpha}$$

$$k(I,s)c_i^{\alpha}\varphi = \uparrow \qquad \Longleftrightarrow (\exists a\in M^{\alpha})\ k(I,s(x_i^{\alpha}/a))\varphi = \uparrow$$

A megkötések $\neg$-re és $\vee$-ra megegyeznek a 3. fejezet elején megadottakkal.

Az érvényesség $\models$, $\mathcal{C}_{\Sigma}$ és $\mathcal{C}_N$ definiciója formálisan azonos a predikátumkalkulusnál megadott definicióval, csak a $k(I,s)$ függvény és a modelltér most más.

A többtipusu logikák nyelve a szintaktika és szemantika közti kapcsolat szempontjából ugy viselkedik, mint az elsőrendü nyelv, például igaz rá a kompaktsági tétel.

Bármely $\mathfrak{A} = \langle R, r, A, \mathfrak{a}\rangle$ algebrai rendszerhez található olyan $\mathfrak{G} = \langle G, g, B, \mathfrak{b}\rangle$ algebrai rendszer, hogy $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$, és $\mathfrak{A}$ minden olyan tulajdonsága, mely megfogalmazható, megfogalmazható $\mathfrak{G}$ elsőrendü nyelvén /lásd [7] /. A megfeleltetés ugy történik, hogy $\mathfrak{G}$-n definiálunk egy többtipusu nyelvet. $\mathfrak{A}$ n-edrendü nyelvét ennek feleltetjük meg, majd a többtipusu nyelvet megfeleltetjük $\mathfrak{G}$ elsőrendü nyelvének.

4. A NYELVHIERARCHIA ABSZTRAKCIÓS SZINTJEI

Legyen D az univerzum jelrendszere és D^* a D feletti lehetséges jelsorozatok összessége. Legyenek L_k -k a megoldórendszer /MR/ nyelvei. Az MR-nek rendelkeznie kell egy $\mathcal{H}: D^* \xrightarrow{\sim} L_k$ homomorfizmussal.

Legyen $P \subset D^*$ és legyen $\{p_i / i \in \omega\} \subset P$ probléma az adott MR számára.

Problémakör /PK/

$$\overline{PK}\ \hat{P} \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall p_i, p_j \in \hat{P})(\exists L_k)\ \mathcal{H} p_i, \mathcal{H} p_j \in L_k$$

A D -ben lévő kijelentések a MR által kiválasztott L_k szintjétől függően különböző bonyolultsági problémák lehetnek. A problémák bonyolultsági szintjeinek megfelelően a L_k nyelveken a következő négy absztrakciós szintet különböztetjük meg:

1/ Első szintü nyelv /F^o/. Nem ad lehetőséget absztrahálásra, mivel csupán a problémakör elemeit tudja megnevezni. Ez a D interpretációit konstatáló nyelvszint. Megfelel a 0-ad rendü predikátumkalkulusnak.

2/ Második szintü nyelv /F^1/. Lehetőséget biztosit D egyes interpretációinak elemei közti kapcsolat leirására egy adott jelenségkörön belül. Itt már lehetőség van bizonyos foku absztrahálásra. Ez megfelel az elsőrendü predikátumkalkulusnak.

3/ Harmadik szintü nyelv /F^n, $n \geq 2$/. Lehetőséget nyujt mélyebb kapcsolatok vizsgálatára és magasabb rendü absztrahálásra is egy adott jelenségkörben. Ennek felel meg az n-ed rendü /$n \geq 2$/ predikátumkalkulus.

4/ Negyedik szintü nyelv. A problémakörnek megfelelő teljes nyelv, az un. rendszerszintü nyelv. Lehetőséget biztosit a problémakör tetszőleges szintü absztrakcióival történő analizisre változó jelenségkör mellett is. Ez egy olyan metanyelv, amely egy uj 1-2-3-4 fejlődési ciklus első szintü nyelvének része lehet.

Mig az 1-2 és 2-3 szintek közti átmenet /a nyelvre és az elméletre nézve/ csak kiterjesztést jelent, addig a 3-4 szintek közti átmenet átfogalmazást kiván és igy a legerősebb induktiv logikai igényeket támasztja a MR-rel szemben. Pl. különböző rendü predikátumkalkulusok leirásához és az ilyen logikák megértéséhez a 3.6. pontban definiált müveleti jel- /K-/ mentes nyelv a 3-4 szintek közti átmenetnek tekinthető. Az algebra fejlődésében hasonlóan 4. szintnek tekinthető az univerzális algebra megjelenése.

A MR a problémakör valamely problémájának leirásához, vagyis beágyazásához a megfelelő absztrakciós szint kiválasztása után ezen a legszükebb beágyazó nyelvet a finomitási tétel segitségével határozza meg.

Megjegyezzük, hogy a fenti négy szint egyre magasabb fokon történő ismétlődése /mint dialektikus logika/ eloszlatja az információrobbanás látszatát, mert egy adott problémakörre vonatkozó információ mennyiségének felhalmozódása során fokozatosan feljebb lépünk az első, második, harmadik szinteken keresztül. Amikor elérjük a negyedik szintet - mivel mint már emlitettük ez már egy uj, önálló ciklus kiindulópontja /első szintje/ lehet -, az információ már önmagában is /az őt megelőző szintek információanyaga nélkül/ kezelhető. Ugyanakkor az előző szintek reprodukálhatók belőle, igy ezek információanyagának tárolása feleslegessé válik. Például az univerzális algebra segitségével az algebra eredményei reprodukálhatók, és ugyanakkor az univerzális algebra tanulmányozásához nem szükségesek algebrai előismeretek. Ebből következik, hogy az oktatásban nem célszerü a történelmi sorrend betartása.

5. BEFEJEZÉS

Az utóbbi években a mesterséges intelligenciával foglalkozó irodalomból egyértelmüen kitünik, hogy a mesterséges intelligencia-elmélet továbbfejlesztéséhez elengedhetetlenül szükséges a már jól kidolgozott szintaktikai elmélet mellett a formális szemantikai elmélet kifejlesztése. Ennek a formalizmusnak igen összetettnek kell lennie, ami a problémakör bonyolultságából következik. A [8]-ban felsorolt formális alapok közül a beágyazó logika univerzális algebrai nyelven megfogalmazott alapjait kivántuk jelenlegi tanulmányunkban tisztázni. A későbbiekben az adekvát nyelvek elméletével az axiomatizálható modellterek hierarchiáját tervezzük vizsgálni, ami a megfelelő absztrakciós szint kiválasztásához ad módszert. Foglalkozni kivánunk még a megoldó logikával, amely lehetőséget biztosit sztochasztikus nyelvek segitségével a MR L_k nyelveinek hipotetikus kiterjesztésére, és ez alapul szolgál az induktiv logikai módszerek kidolgozásához. Ez módszert adna a heurisztikus müködésü programrendszerek szintéziséhez is.

A későbbiekben a MR meglévő tudásszintjének magasabb szinten történő ujraszervezését dialektikus logikai módszerrel, szintén induktiv kiterjesztés utján végző evoluciós logika alapjait kivánjuk kidolgozni. Itt az induktiv logika már nem csak egy elméleten belül, hanem a MR adott tudásszintjéhez tartozó nyelvek, és elméletek között operál /modellterek egymásbaágyazása, elméletek egymásra-interpretálása, stb./. Ez a fejlődés is a fenti négy szint dialektikus ismétlődése szerint történik. Az evoluciós logika az alapja az önszervező MR-nek.

Ahhoz, hogy a későbbiekben kidolgozásra kerülő formális apparátus lehetőséget biztositson a mesterséges intelligencia, pl. egy problémamegoldó programrendszer szintéziséhez, szükséges a "probléma" formális elméletének kidolgozása. Ennek felhasználása és a fenti logikák együttes vizsgálata lehetőséget ad a pragmatika formális elméletének kidolgozására. Ez egy adott probléma és a MR aktualizált célhalmaza szerint orientált nyelvhierarchiára épül. Itt egy ujfajta un. funkcionális vagy viselkedési logika körvonalazódik ki.

Egy magasszintü meseterséges intelligencia, amely képes önszervezésre, vagy önmagá továbbképzésére a következő logikák összehangolt rendszerén kell alapulnia:

1/ beállitó logika

2/ megoldó logika

3/ viselkedési logika

4/ evoluciós logika.

I R O D A L O M

[1] Cohn, P.M.: Universal Algebra, Harper& Row, London, 1965.

[2] Мальцев, А.М.: Альгебраические системы, Наука, 1970.

[3] Henkin, L., Monk, J.D., Tarski, A.: Cylindric Algebras. Part I, North Holland, London, 1971.

[4] Mal'cev, A.M.: The mathematics of algebraic system, collected papers, North-Holland, London, 1971.

[5] Enderton, H.B.: A mathematical introduction to logic, Academic Press, 1972.

[6] Andréka, H., M.Pajzs, K., Németi, I.: A Boole-algebrák minimális definiáló nyelvéről. Számológép. /Megjelenés alatt/

[7] Andréka, H., Gergely, T., Németi, I.: Az n-ed rendü nyelvek néhány kérdéséről /kézirat/.

[8] Гергей Т.: Некоторые вопросы формальной теории решения проблем, сб. докладов симпозиума "Теория задач и способов их решения" Киев, 1972.

DEFINICIÓGYŰJTEMÉNY

$W_\Omega(X) \overset{d}{=} \bigcap \{A \mid A = X \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n \times {}^{n}A\}$ *(4)* x/

$\bar{Z}^3\ \sigma, \Omega, B \overset{d}{\longleftrightarrow} (\forall f \in \sigma\Omega)\, f({}^{a}f_{B}) \subset B$ *(5)*

$\bar{Z}^2\ \sigma\Omega, B \overset{d}{\longleftrightarrow} \bar{Z}^3\ \sigma, \Omega, B$ *(5)*

$\overline{RA}^2\ \langle\Omega,a,A,o\rangle, B \overset{d}{\longleftrightarrow} B \subset A \;\&\; \bar{Z}^3 \sigma, \Omega, B$ *(5)*

$\overset{n}{\Box}\, r \overset{d}{=} \{\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle, \langle b_1,\dots,b_n\rangle\rangle \mid (\forall i \in [1,n])\, \langle a_i, b_i\rangle \in r\}$ *(6)*

$\bar{K}^2\ \equiv, \mathfrak{A} \overset{d}{\longleftrightarrow} \bar{K}^2\ \equiv, \mathfrak{B} \overset{d}{\longleftrightarrow} \overline{RA}^2\ \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}, \equiv,$ ahol *(6)*

$\mathfrak{A} = \langle R,K,a,A,\sigma\rangle$ és $\mathfrak{B} = \langle K,a,A,\sigma\rangle$

$\overline{\exists K}^2\ \equiv, \mathfrak{A} \overset{d}{\longleftrightarrow} \bar{K}^2 \equiv, \mathfrak{B} \;\&\; (\forall n \in \omega, r \in \sigma R_n, a \in r)(\forall i \in [1,n])(\forall c \in {\equiv} a_i)$ *(6)*

$(\exists b \in \overset{n}{\Box} \equiv a)\ b_i = c \;\&\; b \in r$ *(6)*

$\overline{\forall K}^2 \equiv, \mathfrak{A} \overset{d}{\longleftrightarrow} \bar{K}^2 \equiv, \mathfrak{B} \;\&\; (\forall n \in \omega, r \in \sigma R_n, a \in r)(\forall b \in \overset{n}{\Box} \equiv (a))\ b \in r$, *(6)*

ahol $a = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$, $b = \langle b_1,\dots,b_n\rangle$ *(6)*

$\overline{ZHR}^2\ C,H \overset{d}{\longleftrightarrow} C \subset \pi H \;\&\; \bar{Z}^2\ \{\Omega\}, \pi C$ *(7)*

$\overline{LO}^2\ f,H \overset{d}{\longleftrightarrow} (\forall X \subset H)(X \subset fX \;\&\; f \text{ monoton} \;\&\; f^2 = f \;\&\; f: \pi H \to \pi H)$ *(8)*

$\overline{ER}^2\ r,H \overset{d}{\longleftrightarrow} r \supset r \circ r \cup \Delta_H$ *(8)*

$B^H \overset{d}{=} H/\leq^{\varepsilon}_{H}$ *(8)*

$T^H \overset{d}{=} \{\bigcup T \mid T \subset B^H\}$ *(8)*

---

x/ A zárójelben lévő dőlt számok az oldalszámot jelentik.

$\widehat{X}^H \overset{d}{=} \Omega\{T | X \subset T \ \& \ T \in T^H\}$ *(9)*

$e_H \overset{d}{=} \{<X, \widehat{X}> | X \subset H\}$ *(9)*

$\Omega \overset{d}{=} \{\wedge, \vee, \neg\}$ *(9)*

$\Gamma \overset{d}{=} \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$ *(9)*

$R_H \overset{d}{=} <\Omega, a|_\Omega, \pi H, \sigma_H|_\Omega>$ *(9)*

$P_H \overset{d}{=} <\Gamma, a, \pi H, \sigma_H>$ *(9)*

$\overline{EH}^2 \leq, H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \vee_H(^2H) \subset B^H \ \& \ \wedge_H(^2H) \subset B^H$ *(15)*

$\overline{KER}^2 \leq, H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \neg_H H \subset B^H$ *(15)*

$\overline{KEH}\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{EH}\ H \ \& \ \overline{KER}\ H$ *(15)*

$\overline{DEH}\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{EH}\ H \ \& \ (\forall a, b, c \in H)\ a \wedge_H (b \vee_H c)\ \nabla\ (a \wedge_H b)\ \vee_H\ (a \wedge_H c)$ *(15)*

$\overline{EBA}\ H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{KEH}\ H \ \& \ \overline{DEH}\ H$ *(15)*

$\mathcal{C}_H \overset{d}{=} \{X | X \wedge_H X = X \vee_H X = X\}$ *(19)*

$\mathcal{C}_{\neg_H^2} \overset{d}{=} \{X | \neg_H^2 X = X\}$ *(19)*

$\widetilde{f}^1(X_1, \ldots X_{af}) \overset{d}{=} \{f(a_1, \ldots, a_{af}) | (\forall i \in [1, af]\ a_i \in X_i\}$ *(22)*

$\overline{SU}^2 H, S \overset{d}{\Longleftrightarrow} S \wedge_H S \subset S \ \& \ S \vee_H H \subset S \ \& \ S \supset \sup H$ *(23)*

$\overline{VSU}^2 H, S \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{SU}^2 H, S \ \& \ S \neq H$ *(23)*

$\overline{SU}^3 r, H, S \overset{d}{\Longleftrightarrow} r|_H = \leq_H \ \& \ \overline{SU}^2 H, S$ *(23)*

$\overline{AZR}\, \mathcal{C} \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\exists \mathcal{L})\mathcal{C} = \{A \mid \overline{RA}^2 \mathcal{L}, A\}$ *(24)*

$a \equiv_S b \overset{d}{\Longleftrightarrow} a \longleftrightarrow_H b \subset S$ *(25)*

$\overline{EQ}^2 r,H \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{ER}^2 r,H \;\&\; r = r^{-1}$ *(25)*

$H/S \overset{d}{=} H/_{\equiv S}$ *(30)*

$\overline{ORA}^2 \langle\Sigma,a,\pi B,\sigma\rangle, A \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overline{RA}^2\langle\Sigma,a,\pi B,\sigma\rangle, A \;\&\; (\exists\overline{EQ}^2 r,B)A = B/r$ *(30)*

$B^H_S \overset{d}{=} H/S$ *(32)*

$\leq_S \overset{d}{=} \leq_{B^H_S}$ *(32)*

$\Omega_S \overset{d}{=} \Omega_{B^H_S}$ *(32)*

$R^H_S \overset{d}{=} \langle\Omega_H, B^H_S\rangle$ *(34)*

$P^H_S \overset{d}{=} \langle\Omega_H \cup \{S,\neg S\}, B^H_S\rangle$ *(34)*

$\mathcal{L}_{0,1} \overset{d}{=} \langle\{\cup,\cap,\setminus\}, \{\phi,\{\phi\}\}\rangle$ *(35)*

$\overline{BA}\langle\Omega_H,A\rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} A\subset \pi H \;\&\; (\exists \underline{0},\underline{1}\in A)\, \overline{BA}\langle\Omega_H\cup\{\underline{0},\underline{1}\},A\rangle$ *(35)*

$\overline{US}^3 r,H,U \overset{d}{\Longleftrightarrow} \dot{\overline{SU}}^3 r,H,U \;\&\; (a\notin U \Longrightarrow \neg_H a\subset U) \;\&\; U \neq H$ *(35)*

$H/S/S_1 \overset{d}{=} (H/S)/_{|S_1|_S}$ *(36)*

$\Theta_H \overset{d}{=} \{\leftrightarrow_H, V_H\}$ *(37)*

$\Theta^H_S \overset{d}{=} \Theta_H\cup\{S\}$ *(37)*

$J_H \overset{d}{=} \langle\Theta_H,\pi H\rangle$ *(37)*

$J_S^H \overset{d}{=} \langle\{\leftrightarrow_H, V_H\}, B_S^H\rangle$ *(39)*

$L_S^H \overset{d}{=} \langle\{\leftrightarrow_H, V_H, S\} B_S^H\rangle$ *(39)*

$G_S^H \overset{d}{=} \langle\{\leftrightarrow_H, \Delta_{B_S^H}, S\}, B_S^H\rangle$ *(39)*

$D_S^H \overset{d}{=} \langle\{V_H, S\}, B_S^H\rangle$ *(39)*

$\overline{MG}\ L \longleftrightarrow (\exists \overline{BA}\ R) L = \mathcal{L}(R)$ *(40)*

$B \overset{d}{=} \mathcal{L}^{-1}$ *(41)*

$\overline{L}\ \langle\{\leftrightarrow, V, 1\}, A\rangle \overset{d}{\longleftrightarrow}$ az $\langle\{\leftrightarrow, \Delta_A, 1\}, A\rangle$ algebra-Ábel-csoport,

és $\langle\{V, 1\}, A\rangle$ idempotens félcsoport *(41)*

$\overline{KRA}^2\ \mathfrak{A}, T \overset{d}{\longleftrightarrow} (\exists \overline{K}^2 r, A) T \in A/r \ \&\ \overline{RA}^2 \mathfrak{A}, T$ *(43)*

$\overline{KRA}^2\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \overset{d}{\longleftrightarrow} \overline{KRA}^2 \mathfrak{A}, B,$ *(43)*

ahol $\mathfrak{A} = \langle \Xi, A\rangle$ és $\mathfrak{B} = \langle \Xi, B\rangle$

$\overline{SL}^2\ H, \langle S_1, \ldots, S_n\rangle \overset{d}{\longleftrightarrow} S_1 \supset \ldots \supset S_n$ *(44)*

$\overline{FI}^2\ \langle S_1^1, \ldots, S_n^1\rangle, \langle S_1^2, \ldots, S_m^2\rangle$ *(44)*

$\langle S_1^1, \ldots, S_n^1\rangle \cong \langle S_1^2, \ldots, S_n^2\rangle \overset{d}{\longleftrightarrow} (\exists h: [1,n] \twoheadrightarrow [1,n]) (\forall i \in [1,n])$

$$S_i^1 / S_{i+1}^1 \cong S_{h(i)}^2 \Big/ S_{h(i)+1} \qquad (45)$$

$a \leqslant_S b \overset{d}{\longleftrightarrow} a \rightarrow_H b \subset S$ *(45)*

$T_S \overset{d}{=} \langle \leqslant_S, H\rangle$ *(46)*

$Z \overset{d}{=} \{x_i | i \in \omega\}$ *(48)*

$R \overset{d}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ *(48)*

$K \overset{d}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ *(48)*

$T \overset{d}{=} T(K) \overset{d}{=} W_K(Z)$ *(48)*

$P \overset{d}{=} P(R,K) \overset{d}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \times {}^{i}T$ *(48)*

$L \overset{d}{=} \{\wedge, \neg, c_i, d_{ij} | i,j \in \omega\}$ *(48)*

$F \overset{d}{=} F(R,K) \overset{d}{=} W_L(P)$ *(48)*

$v\varphi$: a φ formula szabadváltozóinak halmaza *(49)*

$A \overset{d}{=} A(R,K) \overset{d}{=} \{\varphi | v\varphi = \phi\}$ *(49)*

$I \overset{d}{=} \langle R,K,a,M_I,\sigma_I \rangle$ *(49)*

$M \overset{d}{=} M(R,K) \overset{d}{=} \{\langle R,K,a,A,\sigma \rangle | \sigma(\pm) = \Delta_A\}$ *(50)*

$\langle I,\varphi \rangle \in \models \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall s)\ k(I,s)\varphi = \uparrow$ *(50)*

$N \models \Sigma \overset{d}{\Longleftrightarrow} N \times \Sigma \subset \models$ *(50)*

$N^* \overset{d}{=} \cap \overset{v}{\models} N$ *(51)*

$\Sigma^* \overset{d}{=} \cap \overset{v-1}{\models} \Sigma$ *(51)*

$\Sigma \models \Sigma_1 \overset{d}{\Longleftrightarrow} \Sigma^{**} \supset \Sigma_1^{**}$ *(51)*

$\mathcal{C}_N \overset{d}{=} \{N | N^{**} = N\}$ *(51)*

$\mathcal{C}_\Sigma \overset{d}{=} \{\Sigma | \Sigma^{**} = \Sigma\}$ *(51)*

$I_T \overset{d}{=} \langle R,K,a,T,\sigma_W \cup \sigma_R\rangle$, ahol

$(\forall r \in R \setminus \{\pm\})\sigma_R(r) \overset{d}{=} \phi, \quad \sigma_R(\pm) \overset{d}{=} \Delta_T$ (51)

$\overline{TI}^2 r, \mathfrak{A} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \bar{K}^2\ r, \mathfrak{A} \,\&\, (\forall h : \mathfrak{A} \rightrightarrows \mathfrak{A}) \overset{2}{\square}\ h(r) \subset r$ (51)

$\approx_\Sigma \overset{d}{=} \{\langle\tau_1,\tau_2\rangle \mid \tau_1 \doteq \tau_2 \in \Sigma^{**}\}$ (51)

$\varphi \leq_N \psi \overset{d}{\Longleftrightarrow} N \models \varphi \to \psi$ (52)

$\equiv_N \overset{d}{=} \leq_N^\varepsilon$ (52)

$F_N \overset{d}{=} \langle\leq_N, F\rangle$ (52)

$I_\lambda \overset{d}{=} \langle R,K,a,M_\lambda,\sigma_\lambda\rangle$ (58)

$I \overset{d}{=} \{\langle\lambda,I_\lambda\rangle \mid \lambda \in L\}$ (58)

$\langle K,a,M^I,p^I\rangle \overset{d}{=} \prod_{\lambda \in L} \langle K,a,M_\lambda,\sigma_\lambda\rangle$ (58)

$d_D^I : R \to \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^n{}_M I$ (58)

$\mathfrak{z}_D^I \overset{d}{=} \langle R,K,a,M^F,d_D^I \cup p^I\rangle$ (58)

$\equiv_D^I \overset{d}{=} d_D^I(\pm)$ (60)

$I_D^F \overset{d}{=} \langle R,K,a,M_D,\sigma_D\rangle \overset{d}{=} \mathfrak{z}_D^I / \equiv_D$ (61)

$s_D \overset{d}{=} s \circ \overset{V}{\equiv}_D$ (61)

$s_\lambda \overset{d}{=} s \circ \varepsilon_\lambda$ (61)

$Us(\{\langle\lambda,I_\lambda,s_\lambda\rangle \mid \lambda \in L\},D) \overset{d}{=} \langle I_D,s_D\rangle$ (61)

$\overline{Ce}^3\ E,\leq,H \overset{d}{\Longleftrightarrow} E\Lambda_H E\Delta O_H$ (63)

$\overline{Ke}\ \Sigma \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\exists I,s)\ k(I,s)\Sigma = \uparrow$ *(68)*

$H\widehat{\ _X\ }Sz \overset{d}{=} \bigcap\{Y \mid \overline{SU}^2 H, Y \,\&\, X \subset Y\}$ *(69)*

$\widehat{\ _\Sigma\ }Sz \overset{d}{=} F\widehat{\ _\Sigma\ }Sz$ *(69)*

$I_F \overset{d}{=} \langle \approx, L, a, F, \sigma_W \cup \{\langle \approx, \Delta_F \rangle\}\rangle$ *(80)*

$C^F_\Sigma \overset{d}{=} I_F / \equiv_\Sigma$ *(83)*

$C^F_\Sigma \overset{d}{=} \langle L, a, B^F_\Sigma, \sigma_\Sigma \rangle$ *(83)*

$\mathfrak{B}\left(C^F_\Sigma\right) \overset{d}{=} \langle \Gamma, a, B^F_\Sigma, \sigma_\Sigma |_\Gamma \rangle$ *(83)*

Σ_B a Boole-axiómák halmaza *(84)*

$\overline{BA}\ \mathcal{L} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L} \in \Sigma_B^*$ *(84)*

Σ_C a cilindrikus axiómák halmaza *(85)*

$\overline{CA}\,\mathcal{L} \overset{d}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L} \in \Sigma_C^*$ *(85)*

$C^F \overset{d}{=} \langle \approx, L, a, B^F, \sigma \rangle$ *(86)*

$Z^n_m \overset{d}{=} \{x^n_{m,i} \mid i \in \omega\}$ *(88)*

$Z^1 \overset{d}{=} Z$ *(88)*

$Z^n \overset{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} Z^n_m$ *(88)*

$L^n \overset{d}{=} \{\wedge, \neg, c_i, d_{i,j}, c^k_{m,i}, d^k_{m,i,j} \mid i,j \in \omega, m>0, 0<k\leq n\}$ *(88)*

$P^0 \overset{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m \times {}^m K_0$ *(89)*

$P^1 \overset{d}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m \times {}^m Z$ *(89)*

$P^n \overset{d}{\equiv} \bigcup_{m=1}^{\infty} Z^n_m \times {}^m Z^{n-1}$ *(89)*

$F^n \overset{d}{\equiv} W_{L^n}\left(\bigcup_{m=o}^{n} P^m\right)$ *(89)*

$U^n_m(A) \overset{d}{\equiv} \pi\ {}^m U^{n-1}(A)$ *(89)*

$U^1(A) \overset{d}{\equiv} A$ *(89)*

$U^n(A) \overset{d}{\equiv} \bigcup_{m=1}^{\infty} U^n_m(A)$ *(89)*

$\overset{1}{N^*} \overset{d}{\equiv} N^*$ *(90)*

$\overset{n}{N^*} \overset{d}{\equiv} \{\varphi \in F^n | N \models \varphi\}$ *(90)*

$\mathcal{C}^1_\Sigma \overset{d}{\equiv} \mathcal{C}_\Sigma$ *(90)*

$\mathcal{C}^n_\Sigma \overset{d}{\equiv} \{\Sigma | \Sigma^{*\overset{n}{*}} = \Sigma\}$ *(90)*

$\mathcal{C}^1_N \overset{d}{\equiv} \mathcal{C}_N$ *(90)*

$\mathcal{C}^n_N \overset{d}{\equiv} \{N | N^{\overset{n}{**}} = N\}$ *(90)*

$I_1 \overset{n}{\equiv} I_n \overset{d}{\Longleftrightarrow} \overset{n}{I^*_1} = \overset{n}{I^*_2}$ *(91)*

$Z^\alpha \overset{d}{\equiv} \{x^\alpha_i | i \in \omega, \alpha \in \mathfrak{J}\}$ *(94)*

$L^{\mathfrak{J}} \overset{d}{\equiv} \{\wedge, \neg, c^\alpha_i, d^\alpha_{ij} | i, j \in \omega, \alpha \in \mathfrak{J}\}$ *(94)*

$P^{\mathfrak{J}} \overset{d}{\equiv} \bigcup \{R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \times Z^{\alpha_1} \times \ldots \times Z^{\alpha_n} | \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathfrak{J}^*\}$ *(94)*

$F^{\mathfrak{J}} \overset{d}{\equiv} W_{L^{\mathfrak{J}}}\left(P^{\mathfrak{J}}\right)$ *(94)*

$I^{\mathfrak{J}} \overset{d}{\equiv} \langle R, a, M, m, \sigma\rangle$ *(94)*

$M^{\mathfrak{J}} \overset{d}{\equiv} \{\langle R, a, M, m, \sigma\rangle | M, m, \sigma$ tetszőleges$\}$ *(95)*

TÉTELJEGYZÉK

T1 Legyen $f \in \widehat{\Gamma}_H$. Ekkor *(11)*

a/ f egyszeri $\Longrightarrow f(X_1,\ldots,X_{af}) = \bigcup\{fs \mid s \in X_1 \times \ldots \times X_{af}\}$

b/ $f(X_1,\ldots,X_{af}) \supset \bigcup\{fs \mid s \in X_1 \times \ldots \times X_{af}\}$

c/ $(\forall i \in [1,af])\widehat{X}_i = \widehat{Y}_i \Longrightarrow f(X_1,\ldots,X_{af}) = f(Y_1,\ldots,Y_{af})$

d/ f monoton

e/ ek $f \subset T^H$

T1K1 $(\forall f \in \widehat{\Gamma}_H)\ f({}^{af}H) = f({}^{af}B^H)$ *(14)*

2/ $\overline{RA}^2\ P_H, T^H$

3/ $(\forall f \in \widehat{\Gamma}_H) f = \overset{af+1}{\square}\ e_H \circ f$

T2: $\overline{KER}\ H \Longleftrightarrow (\forall x \in \pi H)\urcorner_H^2 x = \widehat{x}$ *(19)*

T2K: $\overline{KER}\ H \Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\urcorner_H^2} = T^H$ *(19)*

T3 a/ $\overline{EH}\ H \Longrightarrow B^H = \min_{\subseteq}(\mathcal{C}_H \setminus \{\phi\})$ *(20)*

b/ $\overline{KER}\ H \Longrightarrow B^H = \min_{\subseteq}(\mathcal{C}_{\urcorner_H^2} \setminus \{\phi\})$

T4 a/ $\overline{KEH}\ H \Longrightarrow (\forall f \in \widehat{\Gamma})\ f_H\big|_{B^H} = f_B\big|_{B^H}$ *(21)*

b/ $\overline{KEH}\ H \Longrightarrow f_B({}^{af}B^H) \subset B^H$

T4K: $\overline{EBA}\ H \Longrightarrow \overline{BA}\ \langle \leq_B, B^H \rangle$ *(22)*

T5: $\overline{AZR}\ \{S | \overline{SU}^2 H, S\}$ *(24)*

T6: a/ $\overline{EQ}^2\ \equiv_S, H$ *(25)*

b/ $\equiv_S 1_H = S$

c/ $S \in H/_{\equiv_S}$

d $S_1 \subset S \Longrightarrow \equiv_{S_1} \subset \equiv_S$

T7: a/ $S_1 \subset S \Longrightarrow \overline{\forall K}^2\ \equiv_{S_1},\ \langle \equiv_S, H \rangle$ *(29)*

b/ $\overline{\exists K}^2\ \equiv_{S_1},\ \langle \equiv_S, H \rangle$

T8: Legyen $\overline{ORA}^2 R_H, A$ és $A = H/r$. Jelöljük $|X|$-el rX-et. Ekkor *(30)*

$\left(\forall f \in \hat{\Omega}_H\right) |f(a_1, \ldots, a_{af})| = f\left(|a_1|, \ldots, |a_{af}|\right)$

T9: $\overline{ORA}^2 R_H, A \Longrightarrow A \subset \mathscr{C}_H$ *(31)*

T10: $\overline{ORA}^2 R_H, H/r \Longleftrightarrow \overline{SU}^2 H, r1_H\ \&\ r = \equiv_{r1_H}$ *(31)*

T11: $\leq_S^{\varepsilon} = \Delta_{B_S^H}$ *(33)*

T12: $\varrho : \langle \Omega_H, B_S^H \rangle \cong \langle \Omega_S, \tilde{\ni}\ B_S^H \rangle$ *(33)*

T13: $S_1 \subset S \Longrightarrow R_{S_1}^H \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} R_S^H$ *(34)*

T14: $\overline{ORA}^2 R_H, A \Longleftrightarrow \overline{BA}^2 \langle \Omega_H, A \rangle$ *(35)*

T15 a/ $\overline{SU}^2 H, S \Longrightarrow \overline{SU}^2 B_{S_1}^H,\ |S|_{S_1}$ *(36)*

b/ $\overline{SU}^2 H, \bigcup S \Longleftarrow \overline{SU}^2 B_{S_1}^H, S$

T16: a/ $\overline{ORA}^2 P_H, P^H\ \&\ \left(\overline{ORA}^2 P_H, A \Longrightarrow A = P^H\right)$

b/ $P^H/_S = P_S^H$

T17: a/ $O_H \in A \ \&\ \overline{RA}^2 J_H, A \Longrightarrow \overline{RA}^2 P_H, A$ *(38)*

b/ $\overline{RA}^2 J_H, A \Longrightarrow \overline{RA}^2 R_H, A$

T18: $\overline{ORA}^2 J_H, A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2 R_H, A$ *(38)*

T19: $\bar{L}L \ \&\ \mathcal{D}(L)$ monoid $\Longleftrightarrow \overline{MG}\, L$ *(41)*

T20: a/ $\left(\exists \overline{RA}^2 L_1, L_2\right) \overline{MG}\ L_1 \ \&\ \sim\overline{MG}\ L_2$ *(41)*

b/ $\overline{MG}\ L_1 \ \&\ L_1 \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} L_2 \Longrightarrow \overline{MG}\ L_2$

c/ $\bar{L}\ L_1 \ \&\ \overline{RA}^2\ L_1, L_2 \Longrightarrow \bar{L}\ L_2$

d/ $\bar{L}\ L_1 \ \&\ L_1 \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} L_2 \Longrightarrow \bar{L}\ L_2$

T21: $\overline{BA}\ R \ \&\ \overline{SU}^2 R, S \Longrightarrow \overline{RA}^2\ \mathcal{L}(R), S$ *(41)*

T22: a/ $\overline{RA}^2\ J_H, |S|_{S_1}$ *(41)*

b/ $S_1 = S_2 \Longleftrightarrow |S_1| = |S_2|$

T22K: a/ $\overline{ORA}^2 J_{B^H}, A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2 J_H, A$ *(43)*

b/ $\bar{K}^2\ r, R^H \Longleftrightarrow \bar{K}^2 r,\ J^H$

c/ $\overline{BA}\ R \Longrightarrow \left[\bar{K}^2 r, R \Longleftrightarrow \bar{K}^2 r, \mathcal{L}(R)\right]$

d/ $\bar{K}^2 \equiv_{|S|},\ J^H$

e/ $\overline{SU}^2 B^H, A \Longleftrightarrow \overline{KRA}^2\ J^H, A \Longleftrightarrow \overline{ORA}^2\ J_H,\ J^H_{U_A}$

T23: a/ $\bar{L}\ L \Longrightarrow (\forall\ \overline{KRA}^2 L, S)(\exists\ \bar{K}^2 r, L)\, S \in L/r$ *(44)*

b/ $\bar{L}\ L \Longrightarrow (\forall\ \bar{K}^2\ r, L)\ (\exists\ \overline{KRA}^2 L, S)\ S \in L/r$

T24 $S^1_n = S^2_m \Longrightarrow$ /van közös izomorf finomitása $<S^1_1, \dots, S^1_n>$ -nek és $<S^2_1, \dots, S^2_m>$ -nek/

T24K: $\overline{BA}\ B \,\&\, B \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C \Longrightarrow (aB \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B_1^1 \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \ldots \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C$ és a $B \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B_1^2 \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \ldots \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C$

láncoknak van közös finomitása/

T25: $R^{T_S} = R_S^H$ *(46)*

T25a: a/ $\{S \mid \overline{SU}^2 H, S\} \supset \{\overline{SU}^2 T_{S_1}, S\}$ *(46)*

b/ $\overline{ORA}^2 T_S, B \Longrightarrow \overline{ORA}^2 H, B$

T26: Legyen $H \supset H_1$. Ekkor *(47)*

$\overline{RA}^2 R_H, R_{H_1} \Longleftrightarrow \overline{RA}^2\ R^H, R^{H_1}$

T27 a/ $\overline{\exists K}^2 \approx_\Sigma, I_T$ *(52)*

b/ $I_T /_{\approx_E} \in E^*$

c/ $\approx_E = \bigcap\{r \mid (\mathcal{T}_1 \pm \mathcal{T}_2 \in E \Longrightarrow \langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle \in r) \,\&\, \overline{TI}^2 r, T\}$

d/ $\approx_E = \bigcap\{r \mid T/_r \in E^*\}$

T28: $\overline{ER}^2 \leq_N, F$ *(53)*

T29: a/ $\chi \in \varphi \wedge_N \psi \Longleftrightarrow \chi \equiv_N \varphi \wedge \psi$ *(54)*

b/ $\chi \in \varphi \vee_N \psi \Longleftrightarrow \chi \equiv_N \varphi \vee \psi$

$\chi \in \neg_N \varphi \Longleftrightarrow \chi \equiv_N \neg \varphi$

T29K: $(\forall N)\overline{EBA}\ F_N$ *(55)*

T30: $N_1 \subset N \Longrightarrow \overline{SU}^2 F_N, N_1^*$ *(56)*

T30K: a/ $\Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma \Longrightarrow \overline{SU}^2 F, \Sigma$ *(56)*

b/ $\leqslant_N = \leqslant_{N^*}$

c/ $R^{F_N} = R^F_{N^*}$

T31: $\left(\exists\,\overline{SU}^2 F,\Sigma\right)\ \Sigma\notin\mathcal{C}_\Sigma$ *(57)*

T32: $\overline{RA}^2 R_F, R_{\hat{A}}$ *(57)*

T32K: $\overline{EBA}^2 \leq, A$ *(58)*

T33: $\overline{SU}^3 \subseteq\ ,\pi L, D \Longrightarrow \overline{\forall K}^2\ d(\pm),\ \{{}^{I}_{D}$ *(60)*

T34: $\overline{US}^2 \pi L, D \Longrightarrow \left(k\,(I_D, s_D)\,\varphi = \uparrow \Longleftrightarrow \{\lambda \in L \mid k\,(I_\lambda, s_\lambda)\,\varphi = \uparrow\} \in D\right)$ *(61)*

T35: $\overline{US}^2 F_N, U \Longleftrightarrow (\exists I \in N^{**}, s)\ k\,(I,s)^{-1}\uparrow\ = U$ *(64)*

T35K1: $\overline{KE}\ \Sigma \Longleftrightarrow \overline{Ce}\ \Sigma$ *(67)*

T35K2: a/ $\overline{SU}^3 \leq_M, A, S \Longleftrightarrow S = S^{**} \cap A$ *(67)*

b/ $\{S \mid \overline{SU}^3 \leq_M, A, S\} = \mathcal{C}_\Sigma \tilde{\cap} \{A\}$

T36: $\mathcal{C}_\Sigma = \{\widehat{\Sigma}^{Sz} \mid \Sigma \subset A\}$ *(69)*

T36K $\Sigma^{**} = \widehat{\supset_Z \Sigma}^{Sz}$ *(70)*

T37 $\overline{AZR}\ \mathcal{C}_\Sigma$ *(70)*

T38 $\overline{Ke}\Sigma \Longleftrightarrow (\forall \Sigma_o \subset\!\!\!\!\bigcirc\ \Sigma)\,\overline{Ke}\Sigma$ *(72)*

T39: $\bigcap \mathcal{C}_Q = 1_F$ *(76)*

T40: $\mathcal{C}_Q = \mathcal{C}_\Sigma$ *(77)*

T41: $\bar{K}^2 \equiv_\Sigma, I_F \Longleftrightarrow \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma$ *(81)*

T41K: a/ $C^F \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow C \Longleftrightarrow (\exists\Sigma) C \cong C^F_\Sigma$ *(83)*

b/ $\bar{K}^2 r, I_F \;\&\; r \supset \equiv \Longleftrightarrow (\exists \Sigma \in \mathcal{C}_\Sigma) r = \equiv_\Sigma$ *(83)*

T42: $\mathcal{B}\left(C^F_\Sigma\right) = P^F_\Sigma$ *(83)*

T31T41K: $\left(\exists \bar{K}^2 r, P^F\right) \sim \bar{K}^2 r, C^F$ *(84)*

T43: $C^F_\Sigma \in \left(C^F\right)^{**}$ *(86)*

S1: $\Sigma^{**}_C = \left(C^F\right)^*$ *(86)*

T44: $\Sigma^{**}_C \subset \left(C^F\right)^*$ *(86)*

S2: C^* a legkisebb C^F-et tartalmazó, egyenletekkel axiomatizálható szabály *(88)*

T45: $\left(\exists \Sigma \subset F^2\right)\left(\left(\forall \Sigma_o \subset_{\mathrm{V}} \Sigma\right)(\exists I) I \models \Sigma_o \;\&\; \sim (\exists I) I \models \Sigma\right)$ *(90)*

T45K: $\sim (\exists \varphi \in F) I \models \varphi \Longleftrightarrow I \models \varphi_1$, ahol

$$\mathcal{C}_1 \overset{d}{=} \neg C^2_{2,1} \left(\text{ↄ}_1 \neg x^2_{2,1} x_1 x_1 \wedge \text{ↄ}_1 \text{ↄ}_2 \text{ↄ}_3 \left(x^2_{2,1} x_1 x_2 \wedge x^2_{2,1} x_2 x_3 \rightarrow x^2_{2,1} x_1 x_3\right) \wedge \text{ↄ}_1 C_2 x^2_{2,1} x_1 x_2\right) \quad (91)$$

T46: a/ $\overline{EQ}^2 \overset{n}{\equiv}, M$ *(91)*

b/ $k \leq n \Longrightarrow \overset{k}{\equiv} \subset \overset{n}{\equiv}$

T47: $\overset{1}{\equiv} \neq \overset{2}{\equiv}$ *(92)*

T48: $\left(\exists \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle \in \overset{1}{\equiv} \setminus \overset{2}{\equiv}\right) \sim \left(\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{A}\right)$ *(92)*

S3: $(\forall n \in \omega) \overset{n}{\equiv} \neq \overset{n+1}{\equiv}$ *(94)*

ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK

TÁRGYMUTATÓ

F

G

GY

I

K

L

M

R

SZ

T

U

V

Z

Kiadja a Központi Fizikai Kutató Intézet
Felelős kiadó: Sándory Mihály, a KFKI
Elektronikus Tudományos Tanácsának elnöke
Szakmai lektor: Náray Miklós
Példányszám: 255 Törzsszám: 72-7113
Készült a KFKI sokszorositó üzemében
Budapest, 1972. december hó